

崩壊する粒状体における局所的間隙比の変化

前橋工科大学院 学生会員 ○阿部 大樹
前橋工科大学 正会員 土倉 泰

1. はじめに

土は、多くの小さい土粒子によって構成されていて、土粒子と土粒子が接触して力を伝達している。土粒子のない部分は間隙である。この間隙の分布状況に着目して、土の強さや変形のメカニズムを検討できるのではないかと考えた。

本文では、球の集合でできた粒状体で土をモデル化して扱う。粒状体のボロノイ分割¹⁾を使うと、個々の球の占有領域が決まり、球毎の間隙を定義できる。

粒状体のボロノイ分割は数式で表すことができる。そこで、数式処理でボロノイ分割を求め、粒状体が崩れる時の局所的な間隙比の変化を調べるためにこの分割を適用した例を示す。

2. 粒状体のボロノイ分割

空間は、空間中に散在するいくつかの点の中から最も近い点を選ぶことで分割できる。これをボロノイ分割と呼ぶ。通常のボロノイ分割(図1の(a))は、分散する点の中間に引いた線分によって表される。粒状体のボロノイ分割(図1の(b))は、球に接線を引いたときの接線の長さが、最も短い球を選ぶことによって求められる分割である。分割線は、小さい球よりも大きい球の近くに引かれることになる。

この粒状体のボロノイ分割を用いて、2次元上での粒子1つが持つ領域を考えると、図2の(a)のように分割線に囲まれた多角形になる。3次元上で粒状体のボロノイ分割を用いて粒子1つが持つ領域を考えると、図2の(b)の様な多面体となる。

3. 3次元で粒状体をボロノイ分割するための数式

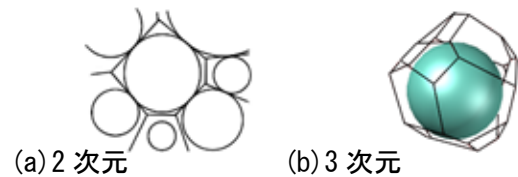
3次元上の粒状体をボロノイ分割するに、まず、ボロノイ分割可能な球の選別法を説明する。

- ① 球の集団の中から無作為に球を1つ選ぶ。この球の番号を1とする。
- ② 球1と他の球との間の分割面を求めていく。たとえば、図3の、球1と球2の間の分割面を求めるとする。分割面は、球1と球2の接線(Lc)の長さ



(a) ボロノイ分割 (b) 粒状体のボロノイ分割

図1 分割に対する粒子径の影響



(a) 2次元 (b) 3次元
図2 ボロノイ多角形(a)とボロノイ多面体(b)

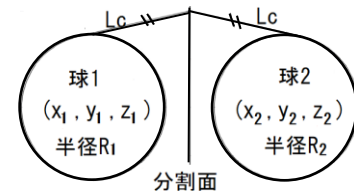


図3 球1と球2のボロノイ分割面

が等しい所を通るように作られる。球1の中心座標は (x_1, y_1, z_1) 、半径は $R_1 = 1$ 、球2の中心座標は (x_2, y_2, z_2) 、半径は $R_2 = 1$ とする。まず、分割面の基本形の式を以下に示す。

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (1)$$

式(1)の a, b, c, d を求めるために、式(2)、式(3)の連立方程式を解く。式(2)、式(3)は、接線の2乗を求める式である。

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 - R_1^2 = L_c^2 \quad (2)$$

$$(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2 - R_2^2 = L_c^2 \quad (3)$$

連立方程式を解くと、 a, b, c, d が以下のように求まり、分割面の式が求められる。

$$a = 2(x_2 - x_1) \quad (4)$$

$$b = 2(y_2 - y_1) \quad (5)$$

$$c = 2(z_2 - z_1) \quad (6)$$

$$d = x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 + z_1^2 - z_2^2 - R_1^2 + R_2^2 \quad (7)$$

- ③ 球2以外の球との間の式(1)を求め、得られた式の中から3つ選び、連立方程式を解き、3つの面の交点座標を求めていく。求められた交点座標を (x_p, y_p, z_p) とする。

キーワード 粒状体, ボロノイ分割, 間隙, 局所的間隙比

連絡先 〒371-0816 群馬県前橋市上佐鳥町 460-1 前橋工科大学 TEL : 027-265-7305 E-mail : tsuchi@maebashi-it.ac.jp

- ④ 求められた交点座標の中から、次のようにボロノイ分割に用いる交点を選ぶ。すなわち、分割面に垂直なベクトル($\vec{n} = (a, b, c)$)と、 $\vec{n}$ と平面の交点と交点(x_p, y_p, z_p)とを結ぶベクトル($\vec{v_p}$)の内積を考える。

$$(\vec{n} \cdot \vec{v_p}) \leq 0 \tag{8}$$

式(8)のようになれば、その交点は考えている分割面よりも球1に近い位置に存在する。

- ⑤ 最終的に求められた交点座標を結び、図2の(d)のようなボロノイ多面体が完成すれば、その球はボロノイ分割可能である。多面体が完成しない場合は、ボロノイ分割が不可能な球(球1つが持つ領域を求められない)として排除する。

次に、球が占有する領域の間隙の体積、球の体積を求め、その後式(9)より、局所の間隙比を求める。

$$e = \frac{V_v}{V_s} \tag{9}$$

V_v : 間隙の体積 V_s : 粒子の体積 e : 局所の間隙比

4. 求められた局所の間隙比の数値

重力作用下で、粒状要素法を使ったシミュレーション(パラメータは表1)を用いて辺長7の立方体の箱の中に半径1の球モデルを30個入れた。その箱の側面1つを図4の太い矢印方向に0.11009動かした状況を(b)、(b)を0.12630動かした状況を(c)とする。式(1)～(9)から図4の細い矢印で示した2球の局所の間隙比を求められた。(a)から(b)は、図5中の矢印で示した球が下へ落ちる大きな変化がある。(b)から(c)は比較的变化が小さい。(c)になると、球全体が下に詰まる。表2に示すとおり、領域分割によって間隙の局所的变化を数値で捉えることができる。粒状体が崩れる過程で大きな変化のないときには、(b)から(c)のように体積は収縮し、局所の間隙比のばらつきは小さくなるのではと考えられる。

体心立方格子と面心立方格子の内部の球の間隙比(表3)と比較すると、各モデルの間隙比は面心立方格子の球の間隙比より小さい為、研究モデルは最密ではない。

5. おわりに

粒状体の崩れる過程を粒状要素法によるシミュレーションで再現し、粒の移動により生じる局所の間隙比の変化を調べた。今後取り扱う粒の数を増やし、崩壊時に生じる間隙分布の変化を検討したい。

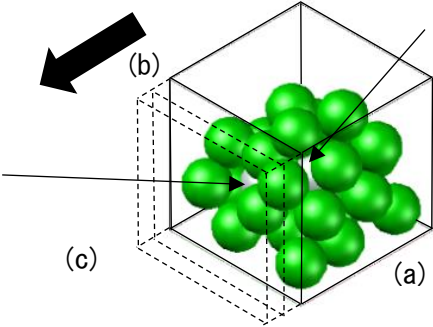


図4 本研究に用いたモデル

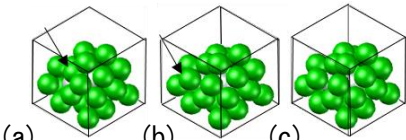


図5 各モデルの球の積み重なり方

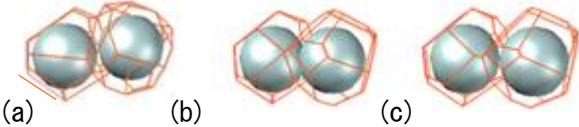


図6 各モデルの完成したボロノイ多面体



図7 体心立方格子(a)と面心立方格子(b)

表1 シミュレーションのパラメータ

ヤング率	ポアソン比	密度	摩擦角
20GPa	0.2	2.65g/cm ³	20°

表2 局所の間隙比の値

	図6 左球	図6 右球	合計	差の 絶対値
(a)	0.6729	0.8216	1.4945	0.1487
(b)	0.5641	1.3491	1.9132	0.7850
(c)	0.6099	0.9157	1.5256	0.3058

表3 体心立方と面心立方の場合の間隙比值

格子名	間隙比
体心立方格子	0.6548
面心立方格子	0.3505

参考文献

1) 佐武正雄: 土の構造とメカニクス—ミクロからマクロへ—3.土のメカニクス入門, 土と基礎, 50-7 pp.49-54, 2002.