

時間反転法を用いたトポロジース感度による 3次元散乱体決定解析

○群馬大学大学院理工学府 学生会員 森川光
群馬大学大学院理工学府 正会員 斎藤隆泰

1. はじめに

構造物の維持管理を行う上で、非破壊検査を行うことは重要である。特に、構造物内部の欠陥を非破壊評価する代表的な欠陥形状再構成手法として、開口合成法が挙げられる。しかし、開口合成法は、計測した受信波形を振幅を重みとして、対応する空間位置にプロットしていく単純な手法であり、散乱波に含まれる欠陥の情報を十分に使い切れていないとも言えない。そこで、本研究では、時間反転法¹⁾と呼ばれる方法を用いて欠陥の位置を特定する方法を、超音波非破壊評価法へ適用することを考える。ここでは、問題を単純化し、対象とする問題を3次元スカラー波動問題に帰着する。時間反転法では、計測した欠陥からの散乱波を試験体内部に時間反転し、逆伝搬させることで欠陥の位置を特定する。しかし、欠陥の特定には単に時間反転波の収束位置だけで欠陥の位置を特定せずに、何らかの評価指標を入れて定量的に欠陥を特定する必要がある。そこで、本研究では、Bonnetが定式化した、対象領域の微小なトポロジース感度²⁾に対する目的汎関数の変化率で定義されるトポロジース感度²⁾を時間反転法における欠陥検出指標として用いる。また、散乱体からの散乱波の計算には、演算子積分時間領域境界要素法³⁾を用いる。数値解析例として、対象領域内部に散乱体が存在する場合における散乱体決定解析結果を示し、本手法の妥当性を示す。

2. 解くべき問題

本研究で対象とする超音波の送受信概要を図1(a)に示す。今、境界 Γ を持つ散乱体が存在する領域を Ω_Γ とする。このとき、以下のようなスカラー波動場 u_Γ の初期値境界値問題を考える。

$$\Delta u_\Gamma(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c^2} \ddot{u}_\Gamma(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x} \in \Omega_\Gamma, 0 < t) \quad (1)$$

$$q_\Gamma(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial u_\Gamma}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (\mathbf{x} \in \Gamma, 0 < t) \quad (2)$$

$$u_\Gamma(\mathbf{x}, 0) = \dot{u}_\Gamma(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad (\mathbf{x} \in \Omega_\Gamma) \quad (3)$$

ここで、 c は波速、 t は時間、 $(\dot{})$ は時間微分、 $\mathbf{n}$ は境界 Γ の外向き単位法線ベクトルを表し、散乱波は放射条件を満足するものとする。想定する超音波非破壊評価法は、対象領域 Ω_Γ 内部に存在する未知の散乱体に対して、平面波を送信し、図1(a)のような M 個の受信点 $\mathbf{x}^m (m = 1, 2, \dots, M)$ で受信した散乱波形から、未知の散乱体の位置、個数、形状を決

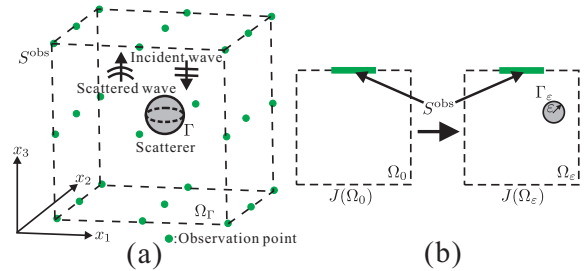


図1 散乱体決定解析 (a) 解くべき問題 (b) トポロジース感度。

定する問題である。まず、本研究で散乱体の検出指標として用いるトポロジース感度を定義するために、以下の目的汎関数を導入する。

$$J(\Omega_0) = \int_0^T \int_{S^{\text{obs}}} \varphi(u_0(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t) dS_x dt \quad (4)$$

$$\varphi(u_0(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} |u_0(\mathbf{x}, t) - u_\Gamma^{\text{obs}}(\mathbf{x}, t)|^2 \quad (5)$$

本研究では、目的汎関数を、散乱体が存在しないと仮定した場合の観測境界 S^{obs} 上の受信点 $\mathbf{x}^m$ におけるスカラー波動場 u_0 と実際の位置に散乱体が存在する場合の計測データ u_Γ^{obs} (ただし、 $0 \leq t \leq T$ であり、 T は計測時間)の差として与える。後に述べるように、領域内部で無限小の散乱体が発生した際の式(4)の目的汎関数の変化率がトポロジース感度であるから、領域内部のいずれの箇所で散乱体が発生すればトポロジース感度が変化するかを追跡することで、散乱体の位置、個数、形状を決定する。

3. 時間反転法とトポロジース感度

図1(b)のような、散乱体が存在しない領域 Ω_0 内部の内点 $\mathbf{x}$ に、新たな半径 ε の無限小の散乱体(境界 Γ_ε)が発生した時の目的汎関数を $J(\Omega_\varepsilon)$ とすると、一般的にトポロジース感度は、散乱体発生前後の目的汎関数の変化量を、発生した散乱体の面積で除した形で定義され、以下の式で与えられる。

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(\Omega_\varepsilon) - J(\Omega_0)}{\pi \varepsilon^2} \quad (6)$$

式(6)より、実際の散乱体位置 $\mathbf{x}$ のトポロジース感度 $\mathcal{T}(\mathbf{x})$ は、目的汎関数が減少する方向($J(\Omega_\varepsilon) < J(\Omega_0)$)より、必ず負であり、大きな値をもつと考えられる。式(4)-(6)より、本解析で用いるトポロジース感度 $\mathcal{T}(\mathbf{x})$ は以下の式で与えられる。

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}) = \left(\nabla u_0 * (\mathbf{A} \nabla \dot{u}_0) + \frac{1}{c^2} \dot{u}_0 * \dot{u}_0 \right) (\mathbf{x}, T) \quad (7)$$

$$A_{ik} = \frac{3}{2} \delta_{ik} \quad (8)$$

ここに、 $\hat{u}_0(\mathbf{x}, t)$ はトポロジ感度 $\mathcal{T}(\mathbf{x})$ を解析的に解くために定義した随伴波動場の解であり、 $*$ は畳込み積分、 δ_{ik} は Kronecker のデルタである。この随伴波動場は、観測境界 S^{obs} での波形を時間反転させて得られる波動場を解析することと数学的な意味で一致する。具体的には、順解析の解 $u_0(\mathbf{x}, T-t)$ と実際の位置に散乱体が存在する時の計測データ $u_{\Gamma}^{\text{obs}}(\mathbf{x}, T-t)$ の差を振幅とし、受信点 $\mathbf{x}^m$ を波源とする点源波を時間反転波として、領域 Ω_0 に再入射した場と考えられる。よって、散乱体からの散乱波を受信点 $\mathbf{x}^{\text{obs}}$ で受信した後、受信散乱波を領域 Ω_0 内へ再入射させる際、式(7)のトポロジ感度 $\mathcal{T}(\mathbf{x})$ を評価することで、対象領域 Ω_{Γ} 内部に存在する散乱体の位置、個数、形状を決定することができる。

4. 数値解析結果

解析モデルは、図 2(a) のような、対象領域 Ω_{Γ} 内部に球状の散乱体 (半径 a) が、存在するモデルを考える。無限遠方から平面波を入射し、図 2(a) のような 26 個の受信点 $\mathbf{x}^m$ で受信した散乱波形から、未知の散乱体の位置、個数、形状を決定する解析を行った。

(1) 3次元スカラー波動のシミュレーション

本解析では、対象領域 Ω_{Γ} や受信点 $\mathbf{x}^m$ におけるスカラー波動場を求めるために、最新の境界要素法である演算子積分時間領域境界要素法を用いた。また、入射波は図 2(a) に対して、6 方向から理想的な平面波が入射すると、以下の式で与えた。

$$u_{\Gamma}^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\bar{u}_0}{2}(1 - \cos 2\pi\alpha) \quad (9)$$

$$\alpha = \begin{cases} \frac{c}{\lambda} \left(t - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + a}{c} \right) & \text{for } (0 \leq \alpha \leq 1) \\ 0 & \text{for otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

ここに、 $\bar{u}_0$ は振幅、 $\mathbf{p}$ は伝搬方向ベクトルを表す。ただし、波長は $\lambda/a = 1.0$ とした。また、境界要素解析では、散乱体 1 つあたりの要素数を 384、総時間ステップ数を 128、時間増分 $c\Delta t/a = 0.20$ で与えた。図 2(b) - (e) は、散乱体に対して、 $\mathbf{p} = (1, 0, 0)$ の方向に平面波を入射した際の、それぞれ $ct/a = 0.2, 4.0, 8.0, 12.0$ における散乱体周辺のスカラー波動場を示している。なお、参考のため実際の散乱体の位置を白球で示してある。図 2(b) - (e) より、散乱体からの散乱波を確認できる。また、対象領域 Ω_{Γ} 内部を伝搬する平面波と、散乱体からの散乱波が、外部境界で反射せず、無限遠方に伝搬している様子が見て取れる。以上の数値解析結果で得られた受信点 $\mathbf{x}^m$ における散乱波動場を計測データ $u_{\Gamma}^{\text{obs}}(\mathbf{x}^m, t)$ として用いて、散乱体決定解析を行う。

(2) 散乱体決定解析

図 2(a) のような、1 辺 $16a$ の対象領域 Ω_{Γ} 内部に存在する散乱体の位置、個数、形状を決定した数値解析結果を示す。解

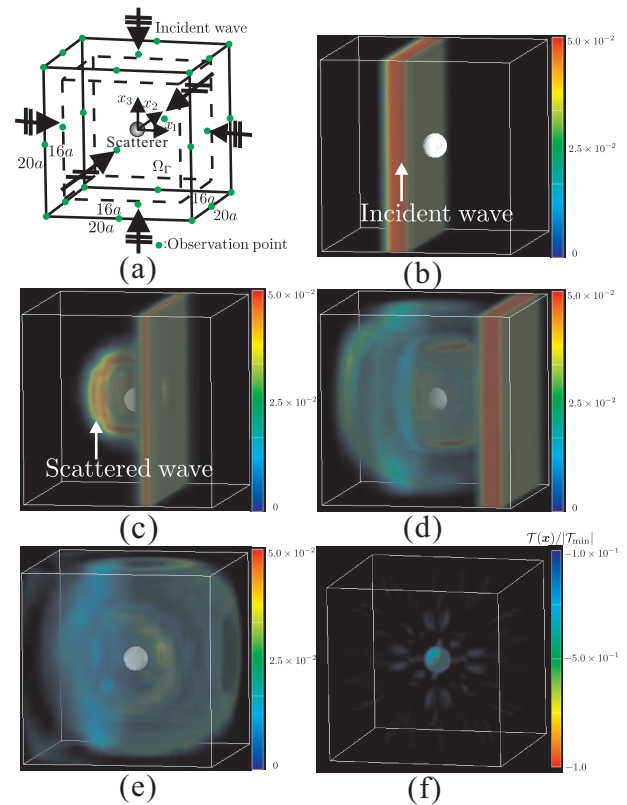


図 2 散乱体による順解析および散乱体決定解析 (a) 解析モデル (b) $ct/a = 0.2$ (c) $ct/a = 4.0$ (d) $ct/a = 8.0$ (e) $ct/a = 12.0$ における散乱体周辺のスカラー波動場 (f) 散乱体決定解析結果。

析パラメータは、(1) における 3 次元スカラー波動のシミュレーションで用いたものと同様である。本研究では、この種の研究に対する第一段階として、適当な位置に欠陥を仮定せず、欠陥が存在しない領域 Ω_0 に対して、順解析と時間反転解析を行い、式(7)のトポロジ感度 $\mathcal{T}(\mathbf{x})$ の空間分布より、散乱体の位置、個数、形状を決定する問題へ帰着させた。図 2(f) に、対象領域 Ω_{Γ} 内部の $51 \times 51 \times 51 = 132651$ 点の全内点でのトポロジ感度 $\mathcal{T}(\mathbf{x})$ を求めた結果を示す。図 2(f) より、トポロジ感度 $\mathcal{T}(\mathbf{x})$ は、実際の散乱体の位置周辺で大きな負の値を示していることが見て取れる。以上のことから、本手法を用いて、対象領域 Ω_{Γ} 内部の未知の散乱体の位置、個数、形状を正しく決定できており、本手法の妥当性が示された。

5. おわりに

対象領域 Ω_{Γ} 内部に存在する散乱体に対して、トポロジ感度 $\mathcal{T}(\mathbf{x})$ を散乱体の検出指標に用いた時間反転解析を行い、散乱体の位置、個数、形状を正しく決定することができた。今後は、弾性体中に存在する欠陥に対しての形状再構成について検討を行う予定である。

参考文献

- 1) M. Fink: Time reversal of ultrasonic fields-Part I: Basic principles, *IEEE T. Ultrason. Ferr.*, Vol.39-5(1992), pp.555-566.
- 2) M. Bonnet: Topological sensitivity for 3D elastodynamic and acoustic inverse scattering in the time domain, *Comput. Method appl. m.*, Vol.195, pp.5239-5254, 2006.
- 3) T. Saitoh, S. Hirose: Parallelized fast multipole BEM based on the convolution quadrature method for 3-D wave propagation problems in time-domain, *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, Vol.10(2010), 012242.