不連続性および遡上域を有するベンチマーク問題における Discontinuous Galerkin 有限要素法の有効性の検討

中央大学大学院 学生員 ○ 伊藤 翔
中央大学大学院 学生員 凌 国明
中央大学 正会員 樫山 和男

1. はじめに

津波・高潮・洪水等の数値シミュレーションには，双曲型の方程式である浅水長波方程式が広く用いられており，段波や跳水等たびたび不連続的な解を有する．このような現象に対して，要素境界において解の不連続性を許容するとともに，局所的な保存性を満足する Discontinuous Galerkin 有限要素法（DG 法）[1)]が，浅水長波方程式の高精度な数値解析手法として近年注目されている．

本研究では，この DG 法に着目し，浅水長波方程式に対して空間方向の離散化に三角形要素を用いた DG 法を適用し，DG 法による解析結果と従来の CG 法（SUPG 法に基づく安定化有限要素法）による解析結果を比較することで DG 法の有効性について検討を行う．ベンチマーク問題としては，ダムブレイク問題と孤立波遡上問題を取り上げる．

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式

基礎方程式として非線形浅水長波方程式を用いる．

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F(U)}{\partial x}+\frac{\partial G(U)}{\partial y}=S(U) \tag{1}$$

ここで，U は保存変数，$F(U)$，$G(U)$ は流束関数，$S(U)$ はソース項であり，それぞれ以下のように定義される．

$$U=[\ h\ \ uh\ \ vh\ ]^T \tag{2}$$

$$F(U)=[\ uh\ \ u^2h+\frac{1}{2}gh^2\ \ uvh\ ]^T \tag{3}$$

$$G(U)=[\ vh\ \ uvh\ \ v^2h+\frac{1}{2}gh^2\ ]^T \tag{4}$$

$$S(U)=[\ 0\ \ -gh\frac{\partial z}{\partial x}\ \ -gh\frac{\partial z}{\partial y}\ ]^T \tag{5}$$

ここで，h は全水深，u,v はそれぞれ x,y 方向の断面平均流速，g は重力加速度，z は基準面からの高さである．

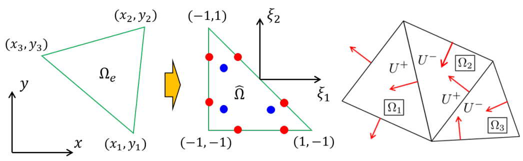
(2) 空間方向の離散化

式 (1) に対して試験関数 r を乗じ，Gauss の発散定理を用いると以下の弱形式が得られる．

$$\int_{\Omega_e}\frac{\partial U}{\partial t}rd\Omega-\int_{\Omega_e}F(U)\frac{\partial r}{\partial x}d\Omega+\int_{\partial\Omega_e}F\cdot n_xrds$$
$$-\int_{\Omega_e}G(U)\frac{\partial r}{\partial y}d\Omega+\int_{\partial\Omega_e}G\cdot n_yrds=\int_{\Omega_e}S(U)\cdot rd\Omega \tag{6}$$

ここで，n_x,n_y は単位法線ベクトルの x,y 方向成分である．物理量と試験関数の近似式は以下のように線形和となる．

$$U\approx U_h=\sum_{i=0}^{N}U_i(t)\phi_i(x,y), \tag{7}$$



図－１ 座標変換と U^+，U^- の定義

$$r\approx r_h=\sum_{j=0}^{N}\alpha_i\phi_j(x,y), \tag{8}$$

ここで，$U_i(t)$ は自由度，α_i は任意定数，ϕ_j は三角形 Dubiner 基底関数[2)]である．この基底関数の直交性のために質量行列が対角行列となり，陽的解法を用いることができる．その他の係数行列の評価には Gauss の数値積分法を用いる．

要素境界 $\partial\Omega e$ において保存性を満足させるために数値流束を導入する．本研究では，Local Lax-Friedrichs Flux を用いる．また，数値振動を抑えるために本研究では Slope Limiter 処理[3)]を導入し，移動境界処理手法としては Bunya らによって提案された手法[4)]を用いる．固定メッシュによる Euler 的手法を用い，要素の乾湿判定は，解析で得られた水深と任意で設定する微小水深との大小関係に基づいて行う．なお，時間方向の離散化としては 2 次精度，2 段階の Runge-Kutta 法を用いる．

3. 数値解析例

本研究では，DG 法の有効性について検討するために，不連続性を有する問題としてダムブレイク問題を取り上げ，遡上域を有する問題として孤立波遡上問題を取り上げる．

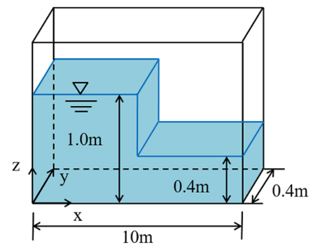
(1) ダムブレイク問題

解析モデルを**図-2** に示す．計算条件は時間増分量を 0.001s，両壁面で slip 条件とし，x 方向（伝播方向）要素幅を 0.1m，y 方向要素幅を 0.2m とした．**図-3** は 1.0s 後の水面形状である．また，**図-4** と**図-5** はそれぞれ**図-3** における赤枠で囲った緩勾配部と青枠で囲った不連続部を拡大したものである．図より，緩勾配部と不連続部の双方において DG 法は CG 法と比べて厳密解との位相のずれが小さく，特に緩勾配部において厳密解とより良い一致を示していることが確認できる．

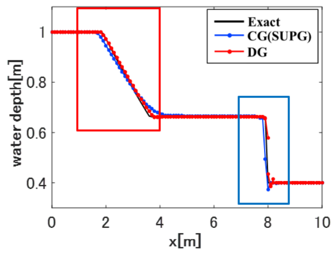
(2) 孤立波遡上問題[5)]

解析モデルを**図-6** に示す．初期波高 $\zeta=0.3m$，初期水深 $h=1.0m$ の波高水深比 0.3 となる孤立波を伝播させ，勾配が 1 : 19.85 である斜面を遡上させる．L は孤立波の

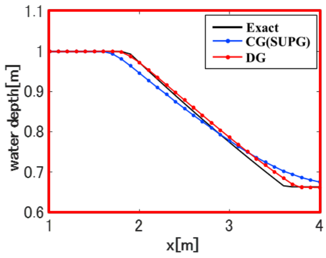
KeyWords： 浅水長波方程式，Discontinuous Galerkin 法，Runge-Kutta 法，Limiter 処理，移動境界
連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL 03-3817-1808 E-mail a12.pra5@g.chuo-u.ac.jp



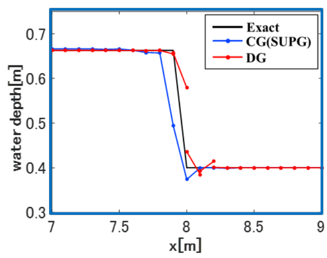
図－２　ダムブレイク問題



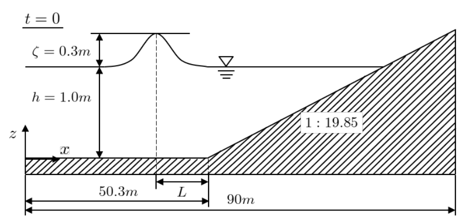
図－３　水面形状



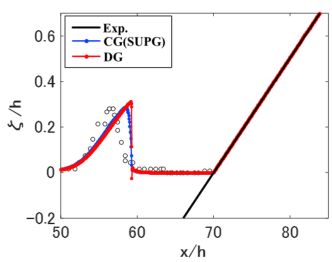
図－４　水面 (緩勾配部)



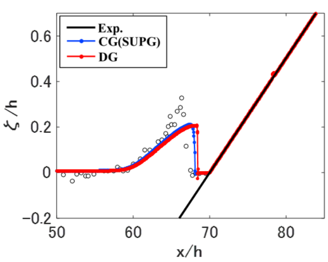
図－５　水面 (不連続部)



図－６　孤立波遡上問題

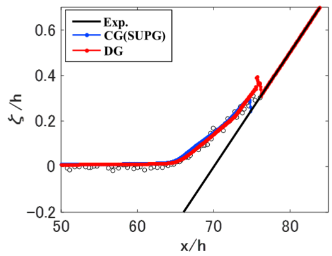


図－７　波形（t'=10)

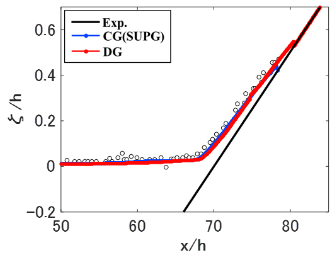


図－８　波形（t'=20)

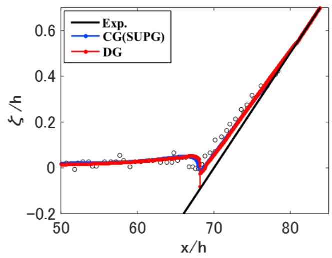
半波長であり，$L = (\frac{4h}{3\zeta})^{\frac{1}{2}} Arccosh((\frac{1}{0.05})^{\frac{1}{2}})$ という式で求められる．計算条件は時間増分量を 0.001s，壁面で slip 条件とし，x 方向（伝播方向）要素幅を 0.05m，y 方向要素幅を 0.05m とした．また，微小水深は 0.065m とした．**図**-7 から**図**-12 はそれぞれ無次元化した時刻 $t' = t(\frac{g}{h})^{\frac{1}{2}}$ の $t' = 10, 20, 30, 40, 50, 60$ における波形である．図より，基礎方程式として浅水長波方程式を用いているため非線形性が卓越し，波の前傾化によって実験値とは差異が見られることが確認できる．また，DG 法は CG 法と比べて急峻な波形を良く捉えるために波の前傾化がより顕著に現れ，それに伴って CG 法と比べて遡上高が大きくなることが確認できる．また，**図**-12 より，DG 法は CG 法と比べて引き波の際の波形が急峻な部分において実験値と良い一致を示していることが確認できる．



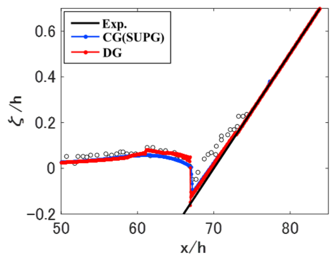
図－９　波形（t'=30)



図－10　波形（t'=40)



図－11　波形（t'=50)



図－12　波形（t'=60)

4.　おわりに

本研究では，浅水長波方程式に対して DG 法を適用し，不連続性を有する問題としてダムブレイク問題を，遡上域を有する問題として孤立波遡上問題を取り上げ，各ベンチマーク問題において DG 法の解析結果と CG 法の解析結果を厳密解および実験値と比較することで，DG 法の有効性について検討を行い，以下の結論を得た．

- ダムブレイク問題においては，DG 法は CG 法と比べて厳密解との位相のずれが小さく，厳密解とより良い一致を示すことが確認できた．
- 孤立波遡上問題においては，浅水長波方程式を基礎方程式として用いてるため非線形性が卓越し，波の前傾化が見られたが，DG 法は CG 法と比べて急峻な波形を良く捉え，波の前傾化がより顕著となり，それに伴って遡上高も大きくなることが確認できた．

今後の課題としては，高次補間 DG 法による解析，分散項の導入などが挙げられる．

参考文献

1) D. Schwanenberg, J. Kongeter : Discontinuous Galerkin methods (Springer, Heidelberg), pp.419-424, 2000.
2) M. Dubiner : Spectral Methods on Triangles and Other Domains, *Sci. Comput.*, Vol.6, Issue.4, pp.345-390, 1991.
3) Dmitri Kuzmin : A vertex-based hierarchical slope limiter for p-adaptive discontinuous Galerkin methods, *Computational and Applied Mathematics*, Vol.233, Issue 12, pp.3077-3085, 2010.
4) S. Bunya, E. J. Kubatko, J. J. Westerink and C. Dawson : A wetting and drying treatment for the Runge-Kutta discontinuous Galerkin solution to the shallow water equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.198, pp.1548-1562, 2009.
5) Synolakis, C.E. : The runup of solitary wave, *Fluid Mech.*, Vol.185, pp.523-545, 1987.