3次元異方性弾性波動問題における疑似縦波の遠方場解析

群馬大学大学院理工学府 学生会員 ○稲垣祐生
群馬大学大学院理工学府 正会員 斎藤隆泰
東京工業大学環境・社会理工学院 正会員 古川陽
東京工業大学環境・社会理工学院 正会員 廣瀬壮一

1. はじめに

近年, いかに構造物の維持管理を行い, 長寿命化していくかが重要な課題となっている. 構造物の維持管理には非破壊評価は欠かすことが出来ず, その中でも, 超音波非破壊評価法は現場で最も広く利用されている手法の一つである. しかしながら, 近年, 音響異方性を持つ構造材料が広く利用されるようになり, そのための超音波非破壊評価法の確立が望まれている. 著者らは, 既往の研究で, 強音響異方性材料として知られる一方向炭素繊維強化プラスチック内部の空洞を再構成する方法 (逆散乱解析) について検討してきた[1]. しかしながら, 現状では2次元問題への検討に留まっている. 逆散乱解析では, 散乱波の遠方場表現が必要となる. そこで, 本研究では, 3次元異方性弾性波動問題に対する逆散乱解析を開発する前段階として, 3次元周波数領域二重層核の遠方場近似の定式化を導く. 簡単な数値解析例を示すことで, 定式化の妥当性を検討する.

2. 異方性弾性波動問題における基礎式

以下, 3次元異方性弾性波動問題について考える. なお, 特に断りのない限り, ローマ文字の添字は1, 2, 3を取り, それらは総和規約に従うとする. さて, 異方性弾性体中の位置 $\boldsymbol{x}$, 角周波数 ω における変位 $u_i(\boldsymbol{x},\omega)$ は, 物体力を無視すれば, それぞれ次の構成則および運動方程式を満足する.

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{x},\omega) = C_{ijkl}u_{k,l}(\boldsymbol{x},\omega) \quad (\text{構成則}) \tag{1}$$

$$\sigma_{ij,j}(\boldsymbol{x},\omega) + \rho\omega^2 u_i(\boldsymbol{x},\omega) = 0 \quad (\text{運動方程式}) \tag{2}$$

ここで, σ_{ij} は応力, ρ および C_{ijkl} は異方性弾性体の密度および弾性定数を表す. また, $[\ ]_{,i}$ は空間微分 $\partial/\partial x_i$ を表す.

3. 3次元異方性弾性波動問題における周波数領域二重層核動的部分の遠方場近似

3次元異方性弾性波動問題における周波数領域基本解[2] $U_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\omega)$ は, 静弾性項を $U^{St}_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, 動弾性項を $U^{Dy}_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\omega)$ と表現すれば, 次のように表すことができる.

$$U_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\omega) = U^{St}_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + U^{Dy}_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\omega) \tag{3}$$

$$U^{St}_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{|\boldsymbol{n}|=1}\sum_{m=1}^{M}\frac{P^m_{ij}}{\rho c_m^2}\delta(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})d\boldsymbol{n} \tag{4}$$

$$U^{Dy}_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\omega) = \frac{\mathrm{i}}{8\pi^2}\int_{|\boldsymbol{n}|=1}\sum_{m=1}^{M}\frac{k_m P^m_{ij}}{2\rho c_m^2}\exp(\mathrm{i}k_m|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}|)d\boldsymbol{n} \tag{5}$$

ここで, $\boldsymbol{r}$ は, $\boldsymbol{y}$ を源点として, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$, P^m_{ij} は, 偏向方向ベクトルの i 方向成分を E^m_i とすると, $P^m_{ij}=E^m_iE^m_j$ で表される変数, c_m は弾性波動の位相速度であり, $\delta(x)$ はデルタ関数である. また, i は虚数単位, k_m は $k_m=\omega/c_m$ である. ただし, 異方性弾性体の場合, $M=3$ であり, その和は異方性弾性体中に発生する疑似縦波 (qP 波), 疑似横波 (qS1, qS2 波) の重ね合わせを表現している. 一方, 式 (4), (5) における積分は単位球を示す単位方向ベクトル $\boldsymbol{n}$ に関して実行され, 式 (3) に対応する二重層核 $T_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\omega)$ は, 次のように表される

$$T_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\omega) = C_{jkpq}\frac{\partial U_{ip}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\omega)}{\partial x_q}e_k(\boldsymbol{y}) \tag{6}$$

ここで, $e_k(\boldsymbol{y})$ は源点 $\boldsymbol{y}$ における外向き単位法線方向ベクトルの k 方向成分である. 次に, 源点 $\boldsymbol{y}$ に対して, 位置 $\boldsymbol{x}$ が, 疑似縦波と疑似横波が分離して観測できる程度に遠方にあると仮定する. 遠方場では, 静弾性項の影響は動弾性項の影響に比べて小さくなるため, 式 (3) における動弾性項のみを考慮し, 遠方条件 $|\boldsymbol{r}|\approx|\boldsymbol{x}|-\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{y}$ を導入すると, 二重層核の遠方場近似式 $T^{\mathrm{far}}_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\omega)$ を最終的に次のように得ることが出来る.

$$\begin{aligned}T^{\mathrm{far}}_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\omega) \approx{}& \frac{-\mathrm{sgn}(\boldsymbol{n}^s\cdot\hat{\boldsymbol{x}})}{4\pi C_{66}|\boldsymbol{x}|}\sqrt{\frac{1}{|D|}}k(\eta^s,\varphi^s)S^3(\eta^s,\varphi^s)\\&\times\sin\eta^s Q_{ij}(\eta^s,\varphi^s)\exp[\mathrm{i}k_0(|\boldsymbol{x}|-\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{y})f(\eta^s,\varphi^s)]\\&\times\exp\left[\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}f(\eta^s,\varphi^s)+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}f(\eta^s,\varphi^s)\right)\right]\end{aligned} \tag{7}$$

ただし,

$$Q_{ij}(\eta^s,\varphi^s) = C_{jkpq}P_{ip}(\eta^s,\varphi^s)n^s_q e_k(\boldsymbol{y}) \tag{8}$$

Key Words: 異方性弾性波動問題, 遠方場解析, 非破壊検査
〒376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1 群馬大学大学院理工学府 TEL.0277-30-1610 E-mail:t12305007@gunma-u.ac.jp

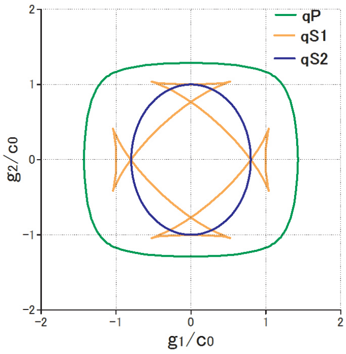

図 1 $x_1 - x_2$ 面におけるオーステナイト系鋼材中を伝搬する波動の群速度曲線

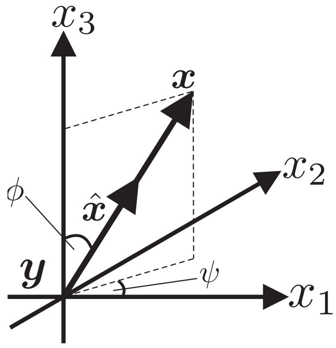

図 2 解析モデル

$$D = det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}f(\eta^s,\varphi^s) & \frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\varphi}f(\eta^s,\varphi^s) \\ \frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\eta}f(\eta^s,\varphi^s) & \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}f(\eta^s,\varphi^s) \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$f(\eta,\varphi) = S(\eta,\varphi)|\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}| \ , \ S(\eta,\varphi) = c_0/c(\eta,\varphi) \tag{10}$$

である. なお, 単位球を示す単位方向ベクトル $\boldsymbol{n}$ に対し, $\boldsymbol{n} = (\sin\eta\cos\varphi, \sin\eta\sin\varphi, \cos\eta)$ なる変数変換を用い, さらに式 (4), (5) の M に関する和について, 疑似縦波に関する項のみを考慮していることに注意する. ここで, sgn は符号関数, η^s および φ^s は, それぞれ $\partial/\partial\eta(f(\eta,\varphi)) = 0, \partial/\partial\varphi(f(\eta,\varphi)) = 0$ を満たす解である. ただし, c_0 は, $C_{\alpha\beta}(\alpha,\beta = 1,...,6)$ を弾性定数のフォークト表記とし, $c_0 = \sqrt{C_{66}/\rho}$, c は疑似縦波の位相速度, $\hat{\boldsymbol{x}}$ は $\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|$ である. また, k_0 および k はそれぞれ $k_0 = \omega/c_0, k = \omega/c$ である.

4. 数値解析例

以下, 数値解析例として, オーステナイト系鋼材に対して式 (7) で表される, 二重層核の動的部分に対する遠方場近似の精度確認を行う. オーステナイト系鋼材の弾性定数は, $C_{11} = C_{33} = 2.04$, $C_{22} = 1.67$, $C_{12} = C_{23} = 1.12$, $C_{13} = 0.762$,$C_{44} = C_{66} = 1.0$, $C_{55} = 0.638$ である. ただし, 各弾性定数は C_{66} で無次元化されていることに注意する. また, 参考のため, この弾性定数から得られる, $x_1 - x_2$ 面に対する群速度曲線を図 1 に示す. 図 1 よりオーステナイト系鋼材の $x_1 - x_2$ 面内においては, 疑似縦波 (qP 波) を示す群速度曲線は四角形状になっていることがわかる. つまり, 疑似縦波の波面は四角形状で伝搬し, 等方とならず, 異方性の影響を受けていることが見て取れる. 今, 図 2 に示すように, 観測点 $\boldsymbol{x}$ を, $\hat{\boldsymbol{x}} = (\sin\phi\cos\psi, \sin\phi\sin\psi, \cos\phi)$ の方向に取るとする. 図 3(a),(b) に, 式 (5) に示される二重層核 T_{ij} の T_{11}, T_{12} 成分, および遠方場近似によって得られた二重層核 T_{ij}^{far} の T_{11}^{far}, T_{12}^{far} 成分をプロットした結果を示す. ただし, $k|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}| = k_0|\boldsymbol{r}|f(\eta,\varphi)$ であり, $(\phi,\psi) = (\pi/6,\pi/3), (\pi/4,\pi/4)$ とした場合の結果を示していることに注意する. 図 3 より, いずれの場合においても, $k_0|\boldsymbol{r}|$ の値が大きくなるごとに, 遠方場近似の結果が, 通常の二重層核の計算結果に近づくことが見て取れ, 精度良く計算が行われていることが分かる.

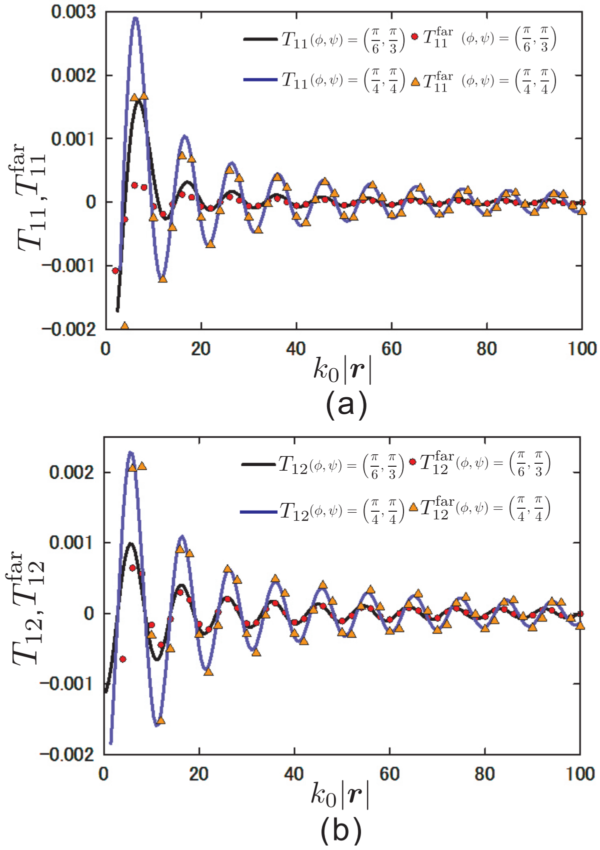

図 3 オーステナイト系鋼材に対する二重層核の遠方場近似 T_{ij}^{far} (a) T_{11}^{far} 成分 (b) T_{12}^{far} 成分

5. おわりに

3 次元異方性弾性波動問題における周波数領域二重層核の遠方場近似の定式化を行った. オーステナイト系鋼材を対象とした数値解析例を示し, 本手法の妥当性を示した. 今後は, 強音響異方性材料である炭素繊維強化プラスチックに対する本手法の適用や, 本手法を用いた, 3 次元異方性弾性波動問題に対する逆散乱解析の定式化を行う予定である.

参考文献

1) 稲垣祐生, 斎藤隆泰, 古川陽, 廣瀬壮一:一方向炭素繊維強化 CFRP 中の欠陥に対する逆散乱解析, 計算数理工学論文集, **17**, pp. 7-12, 2017.
2) Wang, C.-Y. and Achenbach, J.D.: Elastodynamic fundamental solutions for anisotropic solids, *Geophys. J. Int.*, **118**, pp.384-392, 1994.