演算子積分時間領域境界要素法を用いたき裂による 2次元面外波動散乱解析および逆散乱解析

○群馬大学理工学部　学生会員　小野寺貴
群馬大学大学院理工学府　正会員　斎藤隆泰

1.　はじめに

土木構造物の維持管理を定量的に行うために超音波非破壊評価法の重要性が増加している. 構造物内部の欠陥の位置, 大きさ等を画像化する方法の 1 つとして開口合成法が挙げられるが, 開口合成法では単純に計測で得られた受信波形を重ね合わせて欠陥像を再構成するため, 受信波形に含まれる欠陥の情報を全て使い切れているとは言い難い. そこで, 本研究では, 線形化逆散乱解析法に着目する. 著者らのグループでは, これまで体積型欠陥である空洞に対して逆散乱解析を行い, 正しく欠陥像を再構成できることを確認してきた[1]. 本研究では, 既往の逆散乱解析の対象を面積型欠陥に対するき裂へと拡張する. その際, 現場での計測データは時間領域であるため, 計測通り時間領域で直接散乱波形を求め, 逆散乱解析に適用することが望ましい. 本研究では, 演算子積分時間領域境界要素法 (CQBEM) を用いてき裂による弾性波動散乱解析を行い, 時間領域で得られた散乱波形をもとに, き裂に対する逆散乱解析を行う. CQBEM の説明は文献[2] 等に譲り, 以下では解くべき問題について簡単に説明した後, き裂に対する逆散乱解析の定式化, および数値解析例を示すことで本手法の妥当性, 有効性を検討する.

2.　解くべき問題

解くべき問題は図 1 に示すような, 無限等方弾性体 D 中の長さ $2a$ の開口き裂 S に対する弾性波動散乱解析, および開口き裂 S の形状および位置を特定する逆問題とする. ただし, 本研究ではき裂に対して鉛直上向き, 下向きの 2 方向から波速 c_T の SH 波を送信し, 鉛直上向きに送信した場合には下半分の円周で散乱波を受信し, 鉛直下向きに送信した場合には上半分の円周で散乱波を受信する (図 1). また, x_1, x_2 軸の原点をき裂中心に取るものとする.

3.　き裂に対する逆散乱解析の定式化

CQBEM による弾性波動散乱解析で得られた散乱波形を利用してき裂に対する逆散乱解析の定式化を行う. CQBEM で得られる散乱波形は時間領域で表現されている. 本研究では, 得られた散乱波形をフーリエ変換することで求まる周波数領域での散乱波を利用して解析を行う. 周波数領域における全変位場が入射変位場と散乱変位場の重ね合わせで表せることに注意すると, 散乱波に対する境界積分方程式は次のように書ける.

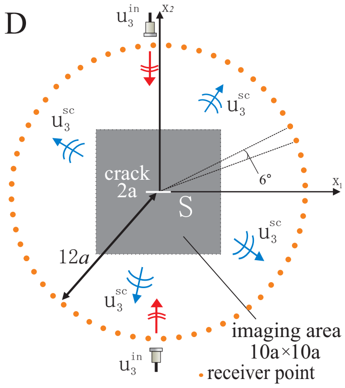

図 1 弾性波動解析および逆散乱解析モデル.

$$u_3^{\rm sc}(\boldsymbol{x},\omega) = -\int_S T_{33}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\omega)[u_3(\boldsymbol{y},\omega)]dS_y \tag{1}$$

ただし ω は角周波数, $T_{33}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\omega)$ は周波数領域における 2 次元面外波動問題に対する二重層核, $[u_3(\boldsymbol{y},\omega)]$ はき裂開口変位を表す. ここで式 (1) 中の二重層核 $T_{33}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\omega)$ に対し漸近展開を行い, 探触子位置 $\boldsymbol{x}$ と欠陥位置 $\boldsymbol{y}$ が十分離れていると仮定すると, 探触子と欠陥までの距離 r は $r \approx |\boldsymbol{x}| - \hat{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{y}$ なる遠方近似で表すことができる. 以上から, 式 (1) は次のように表すことができる.

$$u_3^{\rm sc}(\boldsymbol{x},\omega) = -\frac{k_T\hat{x}_\alpha}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi k_T|\boldsymbol{x}|}}\exp\{{\rm i}(k_T|\boldsymbol{x}|-\frac{\pi}{4})\} \cdot\int_S n_\alpha(\boldsymbol{y})\exp(-{\rm i}k_T\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{y})[u_3(\boldsymbol{y},\omega)]dS_y \tag{2}$$

ここで, $n_\alpha(\boldsymbol{y})(\alpha=1,2)$ は境界 S 上の点 $\boldsymbol{y}$ における外向き単位法線ベクトルであり, $\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|$ である. また, k_T は波数であり $k_T = \omega/c_T$ で表せる. さて, 式 (2) は境界上の点 $\boldsymbol{y}$ での未知の全開口変位場 $[u_3(\boldsymbol{y},\omega)]$ を含んでいる. そこで, Kirchhoff 近似を用いることで $[u_3(\boldsymbol{y},\omega)]$ を入射波と反射波の和として近似する線形化を施す. また, 探触子位置 $\boldsymbol{x}$ が欠陥位置 $\boldsymbol{y}$ から十分遠方である場合, 入射波は平面波として振舞うため, 時間 t に依存する時間領域入射波 $u_3^{\rm in}(\boldsymbol{x},t)$ を, ω_p を中心角周波数, t_s をピーク時刻, $\hat{\boldsymbol{d}}^{\rm in}$ を伝搬方向ベクトル, u_0 を振幅とした次の Ricker 波

$$u_3^{\rm in}(\boldsymbol{x},t) = u_0\frac{\sqrt{\pi}}{2}(\alpha-0.5)\exp(-\alpha) \tag{3}$$

$$\alpha = \left[\frac{w_p}{2}(t - t_s - \frac{\hat{\boldsymbol{d}}^{\rm in}\cdot\boldsymbol{x}}{c_T})\right]^2 \tag{4}$$

Key Words: 演算子積分時間領域境界要素法, 逆散乱解析, 超音波非破壊評価
〒 376-8515　群馬県桐生市天神町 1-5-1　群馬大学理工学部　TEL.0277-30-1610　E-mail:t14303027@gunma-u.ac.jp

で与えると仮定すると, そのフーリエ変換は,

$$u_3^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},\omega)=F(\omega)\exp\left(\mathrm{i}k_T\hat{\boldsymbol{d}}^{\mathrm{in}}\cdot\boldsymbol{x}\right) \tag{5}$$

と表せる. ただし $F(\omega)$ は

$$F(\omega)=-u_0\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\frac{\omega^2}{\exp(\omega^2/\omega_p^2)\exp(-\mathrm{i}\omega t_s)\omega_p^3} \tag{6}$$

となる. 反射波の伝搬方向ベクトルは, $\hat{\boldsymbol{d}}^{\mathrm{ref}}=\hat{\boldsymbol{d}}^{\mathrm{in}}-2(\hat{\boldsymbol{d}}^{\mathrm{in}}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$ であることを考慮して式 (2) を整理すると, 次の式を得る.

$$u_3^{\mathrm{sc}}(\boldsymbol{x},\omega)=-\frac{k_T\hat{x}_\alpha}{2}F(\omega)\sqrt{\frac{2}{\pi k_T|\boldsymbol{x}|}}\exp\{\mathrm{i}(k_T|\boldsymbol{x}|-\frac{\pi}{4})\}\cdot\int_S n_\alpha(\boldsymbol{y})\exp\{-\mathrm{i}k_T(\hat{\boldsymbol{x}}-\hat{\boldsymbol{d}}^{\mathrm{in}})\cdot\boldsymbol{y}\}dS_y \tag{7}$$

ここで, 次のように定義される特異関数

$$\int_D\gamma(\boldsymbol{y})dV_y=\int_S dS_y \tag{8}$$

を導入する. この特異関数 $\gamma(\boldsymbol{y})$ はき裂表面 S でのみ値を有する関数である. 式 (8) を考慮し, 式 (7) にガウスの発散定理を適用することで, 次の式を得る.

$$u_3^{\mathrm{sc}}(\boldsymbol{x},\omega)=F(\omega)\{\hat{x}_\alpha(\hat{x}_\alpha-\hat{d}_\alpha^{\mathrm{in}})\}\sqrt{\frac{k_T^3}{2\pi|\boldsymbol{x}|}}\exp\{\mathrm{i}(k_T|\boldsymbol{x}|+\frac{\pi}{4})\}\cdot\int_D\gamma(\boldsymbol{y})\exp\{-\mathrm{i}k_T(\hat{\boldsymbol{x}}-\hat{\boldsymbol{d}}^{\mathrm{in}})\cdot\boldsymbol{y}\}dV_y \tag{9}$$

ここで $\boldsymbol{K}=k_T(\hat{\boldsymbol{x}}-\hat{\boldsymbol{d}}^{\mathrm{in}})$ なる $\boldsymbol{K}$ 空間を考えれば, 式 (9) に対する逆フーリエ変換より, 次のように特異関数 $\gamma(\boldsymbol{y})$ を求めることができる.

$$\gamma(\boldsymbol{y})=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{u_3^{\mathrm{sc}}(\boldsymbol{x},\omega)}{F(\omega)c_T\hat{x}_\alpha(\hat{x}_\alpha-\hat{d}_\alpha^{\mathrm{in}})}\sqrt{\frac{|\boldsymbol{x}|}{8k_T\pi^3}}\cdot\exp\left[\mathrm{i}\{k_T(\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{y}-\hat{\boldsymbol{d}}^{\mathrm{in}}\cdot\boldsymbol{y}-|\boldsymbol{x}|)-\frac{\pi}{4}\}\right]\cdot\{1-\cos(\theta-\theta^{\mathrm{in}})\}d\omega d\theta \tag{10}$$

ただし, θ^{in} は入射角を表す. 式 (10) の左辺の特異関数 $\gamma(\boldsymbol{y})$ はき裂表面でのみ値を持つ関数であるため, 式 (10) の右辺を精度よく計算できれば, き裂の形状を再構成することができる.

4. 数値解析例

まず, CQBEM で求めた散乱波形の一例を図 2 に示す. CQBEM では, き裂を 21 個の境界要素で分割し, 区分一定要素で計算した. その際の時間増分 $c_T\Delta t/a$, 総時間ステップ数 N, および入射波の中心周波数 ω_p は, それぞれ $c_T\Delta t/a=0.02$, $N=2048$, $\omega_p=\pi$ としている. また図 1 に示すようにき裂中心から距離 $12a$ の円周上を x_1 方向を基準に $\theta=3°$ から $6°$ 間隔で 60 分割した点を散乱波 $u_3^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},t)$ の観測点とした. 図 2 は, $0°\leq\theta\leq180°$ での散乱波形 u_3/u_0 を無次元化時刻 c_Tt/a に対し, 3° から 18° 刻みで示したものである. 図 2 より, いずれの受信点においても散乱波は同一時刻に到達していることがわかる. また, き裂面に垂直な方向に近い観測点における散乱波ほど振幅が大きくなっていることがわかる. 次に図 2 で示したような散乱波形を用いて行った逆散乱解析の結果を図 3 に示す. ただし, 画像化する領域は図 1 に示すように原点中心の $10a\times10a$ の領域であり, 特異関数 $\gamma(\boldsymbol{y})$ の値は, それらの最大値 $\gamma_{\max}(\boldsymbol{y})$ で無次元化した値をプロットしていることに注意されたい. また, 図 3 の中央の黒い実線は実際のき裂を示している. 図 3 より, 特異関数 $\gamma(\boldsymbol{y})$ は, き裂付近で大きな値を示しており, き裂の位置を概ね再構成できていることがわかる.

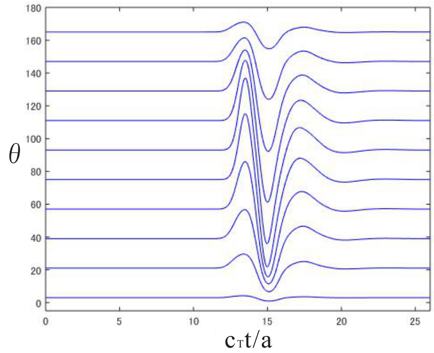

図 2 散乱波形データ ($0°\leq\theta\leq180°$).

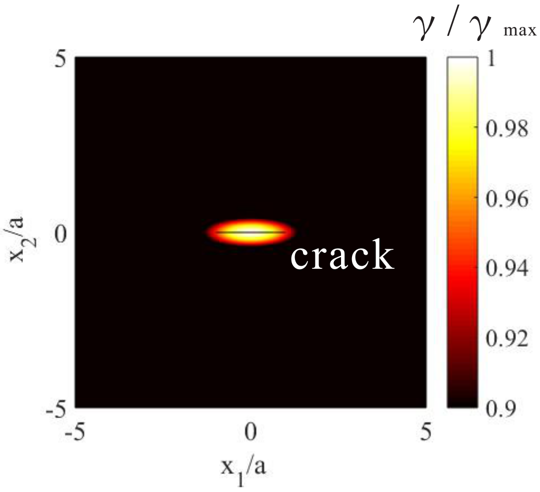

図 3 き裂に対する逆散乱解析結果.

5. まとめと今後の課題

無限等方弾性体中の開口き裂に対する弾性波動散乱解析を行った. また, 得られた散乱波形データをもとに逆散乱解析を行うことで, き裂の形状を概ね再構成することができた. 今後は, 異方性弾性体中のき裂に対する逆散乱解析を行う予定である. また, 順解析の高速解法も実施していきたい.

参考文献

1) 斎藤隆泰, 稲垣祐生, 下田瑞斗: 異方性弾性体中の欠陥に対する 2 次元逆散乱解析, 非破壊検査, vol.66,No.2, pp.84-89, 2017.
2) 福井卓雄, 斎藤隆泰: Lubich の演算子積分法における高速多重極法, 日本シミュレーション学会論文誌, 小特集:境界要素法の新展開, vol.28, pp.17-22, 2009.