

# ペナルティ法で表現したき裂開閉口に伴う 非線形超音波シミュレーション

群馬大学大学院理工学府  
群馬大学大学院理工学府

学生会員 ○野口豪気  
正会員 齋藤隆泰

## 1. はじめに

近年、高調波や分調波を含んだ非線形超音波を用いて欠陥を検出する非線形超音波法<sup>1)</sup>と呼ばれる新たな超音波非破壊評価手法が注目を集めている。境界要素法を用いた解析により、高調波の発生メカニズムは、概ね明らかにされてきた<sup>2)</sup>。一方で、分調波は未知の部分が多く、発生機構の解明には、様々なモデル化やパラメータの設定が必要となる。境界要素法による解析は、高精度ではあるが、計算負荷が大きいため、様々な状況をトライアルすることは難しい。そこで、本研究では、計算負荷が小さく、尚且つ、き裂面の複雑な挙動をシンプルに追跡できる可能性がある粒子法に着目した。先行研究<sup>3)</sup>では、粒子法の一つであるMPS法<sup>4)</sup>を用いて、き裂粒子間の相互作用を変化させるき裂開閉口モデルを導入し、高調波の励起シミュレーションを行い、粒子法の非線形超音波シミュレーションに対する有効性を確認した。本研究では、さらに、き裂の接触処理にペナルティ法を適用し、高調波の励起シミュレーションを行う。定式化を示した後、数値解析例を示すことで、本手法の有効性等について検討する。

## 2. MPS法

粒子*i*と近傍粒子*j*との間で粒子間相互作用モデルを考える。gradient, divergence, Laplacian モデルをそれぞれ以下のように定義し、これらをベクトル微分演算子と等価なものとする。

$$\langle \nabla \phi \rangle_i = \frac{d}{n^0} \sum_{j \neq i} \left[ \frac{(\phi_j - \phi_i)(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j^0 - \mathbf{r}_i^0| |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \right] \quad (1)$$

$$\langle \nabla \cdot \psi \rangle_i = \frac{d}{n^0} \sum_{j \neq i} \left[ \frac{(\psi_j + \psi_i)}{|\mathbf{r}_j^0 - \mathbf{r}_i^0|} \cdot \frac{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \right] \quad (2)$$

$$\langle \nabla^2 \phi \rangle_i = \frac{2d}{n^0} \sum_{j \neq i} \left[ \frac{(\phi_j - \phi_i)}{|\mathbf{r}_j^0 - \mathbf{r}_i^0|^2} w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \right] \quad (3)$$

ここで、 $w$  は重み関数、 $n_0$  は初期粒子数密度、 $d$  は空間次元数である。また、 $\mathbf{r}_i$  と  $\mathbf{r}_j$  はそれぞれ粒子*i*と粒子*j*の位置ベクトルを示し、上添え字の0は初期値を示す。 $\phi$ や $\psi$ はそれぞれスカラー変数、ベクトル変数を示す。なお、MPS法の詳細は、例えば文献<sup>4)</sup>等を参照されたい。

## 3. MPS法による2次元直交異方性弾性波動問題の定式化

物体の変位ベクトルを  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 、応力テンソルを  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ 、ひずみテンソルを  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$  とし、物体力を無視すれば、時刻  $t$  において線形弾性体は、以下の支配方程式を満足する。

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) \quad (5)$$

ここで、 $\rho$  は密度、 $\mathbf{C}$  は弾性定数、 $(\dot{\quad})$  は時間微分である。式(5)を式(4)に代入し、変形に回転成分が含まれないことを考慮すると、次の運動方程式を得る。

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} = C_{13} \nabla \cdot ((\nabla u_1)_1 \mathbf{I}_1 + (\nabla u_3)_3 \mathbf{I}_1) + 2C_{55} \nabla^2 u_1 \\ \quad + (C_{11} - C_{13} - 2C_{55}) \nabla \cdot ((\nabla u_1)_1 \mathbf{I}_1) \\ \rho \frac{\partial v_3}{\partial t} = C_{13} \nabla \cdot ((\nabla u_1)_1 \mathbf{I}_3 + (\nabla u_3)_3 \mathbf{I}_3) + 2C_{55} \nabla^2 u_3 \\ \quad + (C_{33} - C_{13} - 2C_{55}) \nabla \cdot ((\nabla u_3)_3 \mathbf{I}_3) \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 $u_1, u_3$  は、それぞれ変位ベクトル  $\mathbf{u}$  の  $x_1$  方向および、 $x_3$  方向成分であり、 $v_1, v_3$  は変位成分  $u_1, u_3$  に対応する速度成分である。また、 $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_3$  はそれぞれ  $x_1$  方向および、 $x_3$  方向の単位ベクトル、 $(\quad)_n$  は  $x_n$  方向成分を表す。式(6)のベクトル微分演算子に、式(1)-(3)の粒子間相互作用モデルを適用することで、式(6)の左辺の加速度を計算することができる。得られた加速度  $\partial v_i / \partial t$  を用いれば、第  $k+1$  ステップにおける粒子*i*の粒子速度  $\mathbf{v}_i^{k+1}$  と粒子位置  $\mathbf{r}_i^{k+1}$  は、それぞれ次のように更新することができる。

$$\mathbf{v}_i^{k+1} = \mathbf{v}_i^k + \Delta t \left( \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} \right) \quad (7)$$

$$\mathbf{r}_i^{k+1} = \mathbf{r}_i^k + \Delta t \mathbf{v}_i^{k+1} \quad (8)$$

ただし、 $\Delta t$  は時間増分である。

## 4. ペナルティ法によるき裂面の接触処理

き裂面の接触処理には、粒子間のめり込みを許容し、めり込み量に応じた反発力を与えるというペナルティ法を用いる。き裂上面  $S^+$  を表す粒子及び下面  $S^-$  を表す粒子間において、粒子間相対位置ベクトル  $\mathbf{r}_{ij}$  の計算を行い、反発力  $\mathbf{F}_i$  を次式で求める。

$$F_i = -k(l_0 - |\mathbf{r}_{ij}|) \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|}$$

$$k = \begin{cases} k' \frac{m}{(\Delta t)^2} & \text{for } (l_0 - |\mathbf{r}_{ij}| > 0) \\ 0 & \text{for } (l_0 - |\mathbf{r}_{ij}| \leq 0) \end{cases} \quad (9)$$

ここで、 $k$  はばね定数、 $m$  は粒子質量、 $l_0$  は初期粒子間距離である。また、 $k'$  は経験的に決定される無次元数であり、本解析では  $k' = 0.1$  を使用した。タイムステップごとに反発力  $F_i$  を計算し、き裂上面粒子及びき裂下面粒子の位置の修正を実行する。

## 5. き裂開閉口を考慮した非線形超音波シミュレーション

き裂開閉口を考慮した非線形超音波シミュレーションの結果を示す。解析対象の材料は、一方向炭素繊維強化プラスチック (以下、CFRP と略する) とし、密度は  $\rho=1600(\text{kg/m}^3)$ 、弾性定数はそれぞれ  $C_{11}=125.5$ 、 $C_{13}=C_{31}=8.0$ 、 $C_{33}=15.1$ 、 $C_{55}=6.5$ (単位は GPa) で与えた。解析モデルの形状寸法は、図1のような長方形領域  $50\text{mm} \times 100\text{mm}$  とした。また、き裂中心は底面中央から高さ  $37.5\text{mm}$  の位置に設置し、き裂の長さは  $2\text{mm}$  とした。入射波は、解析モデルの上面に次のように与えた。

$$u^{\text{in}} = -u_0 \sin 2\pi\alpha$$

$$\alpha = \begin{cases} \frac{n\Delta t}{T} & \text{for } (0 \leq \alpha \leq 5) \\ 0 & \text{for } (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (10)$$

ここで、 $n$  はステップ数、 $u_0$  は変位振幅、 $T$  は周期である。ただし、実際の解析では、変位振幅  $u_0 = 10.0 \times 10^{-9}(\text{m})$ 、周期  $T = 1.0 \times 10^{-6}(\text{s})$ (中心周波数  $1\text{MHz}$  に相当) としている。

入射波を与えた場合の図1のA点で観測される透過波  $u_3$  の時刻歴波形を図2に示す。比較のため、き裂が存在しない場合の結果も示してある。図2より、き裂開閉口が存在する場合は、き裂が存在しない場合と比較し、波形が歪んでいることが見て取れる。一方、図3は図2におけるそれぞれの波形のフーリエスペクトルを示している。ただし、縦軸は  $1\text{MHz}$  のピーク値で正規化していることに注意されたい。いずれの場合においても、入射波の中心周波数である  $1\text{MHz}$  において、スペクトルのピークが卓越していることがわかる。また、き裂が存在しない場合では、その他の周波数成分の割合はピーク値である  $1\text{MHz}$  を境になだらかに減少する。一方で、き裂開閉口を考慮した場合は、入射超音波の中心周波数  $1\text{MHz}$  の2倍、3倍に対応する  $2\text{MHz}$ 、 $3\text{MHz}$  においてピークを確認することができ、2次、3次高調波が発生していることがわかる。これらの傾向から CFRP に対して、MPS 法を用いた非線形超音波シミュレーションの適用が可能であると考えられる。

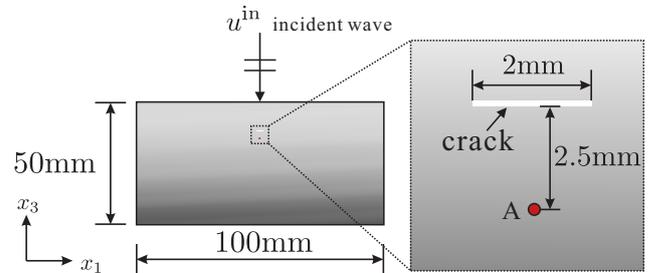


図1 非線形超音波シミュレーションの解析モデル。

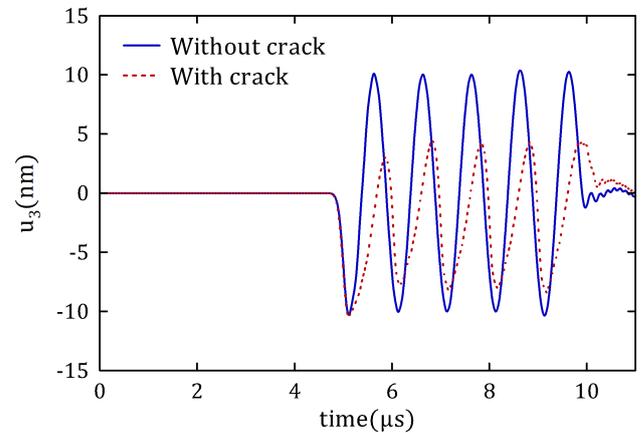


図2 A点での透過波  $u_3$  の時刻歴波形。

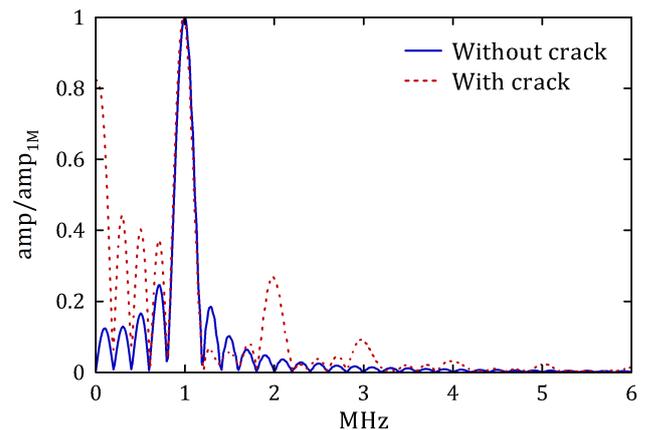


図3 A点での透過波  $u_3$  のフーリエスペクトル

## 6. まとめと今後の課題

MPS 法を用いた非線形超音波法における高調波励起シミュレーションを行った。ペナルティ法を適用した場合においても、CFRP 中のき裂開閉口を考慮した非線形超音波シミュレーションにおいて、高調波の発生を確認できた。ペナルティ法はき裂面の摩擦などを比較的扱いやすい。したがって、今後は、き裂面の滑りや粗さ等を考慮した、より複雑な非線形超音波シミュレーションについて取り組む予定である。

### 参考文献

- 1) 非破壊検査, 検査と材料評価, 特集 非線形超音波法による非破壊検査・評価 V, Vol.64, No.12, 社) 日本非破壊検査協会 (2015).
- 2) 斎藤隆泰・古田雄輔・廣瀬壮一・中畑和之: 2次元動弾性時間領域境界要素法を用いた非線形超音波法における高調波の励起シミュレーション, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol.64, No.2, pp.161-169, (2011).
- 3) 野口豪気・斎藤隆泰: MPS 法を用いた非線形超音波法における高調波の励起シミュレーション, 計算数理工学論文集, Vol.17, pp.13-18, (2017).
- 4) 越塚誠一: 粒子法 計算力学レクチャーシリーズ 5, 丸善株式会社, (2005).