浅水長波流れ解析に対する Discontinuous Galerkin 有限要素法における Limiter 処理の検討

中央大学大学院　学生員　○ 伊藤　翔
中央大学大学院　学生員　　 凌　国明
中央大学大学院　学生員　　 花澤　広貴
中央大学　　　　正会員　　 樫山　和男

1. はじめに

津波や高潮等の数値解析には，双曲型の方程式である浅水長波方程式が広く用いられており，段波や衝撃波等たびたび不連続的な解を有する．このことから近年，要素境界で不連続な解を許容するとともに，保存性を満足する Discontinuous Galerkin 有限要素法（DG 法）が，浅水長波方程式の高精度な解法として注目されている．

本研究では，この DG 法に着目し，浅水長波方程式に対して空間方向の離散化に三角形要素を用いた DG 法を適用し，1 次，2 次補間の DG 法において Limiter 処理の効果の検討を行う．なお，時間方向の離散化には Runge-Kutta 法を適用する．

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式

基礎方程式として用いる浅水長波方程式は，保存形で表示すると以下のようになる．

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F(U)}{\partial x}+\frac{\partial G(U)}{\partial y}=0, \tag{1}$$

ここで，関数 U は保存変数，$F(U)$，$G(U)$ は流束関数であり，それぞれ以下のように定義される．

$$U=[\ h\quad uh\quad vh\ ]^T, \tag{2}$$

$$F(U)=[\ uh\quad u^2h+\frac{1}{2}gh^2\quad uvh\ ]^T, \tag{3}$$

$$G(U)=[\ vh\quad uvh\quad v^2h+\frac{1}{2}gh^2\ ]^T. \tag{4}$$

ここで，h は全水深，u，v は x，y 方向の断面平均流速，g は重力加速度である．

(2) 空間方向の離散化

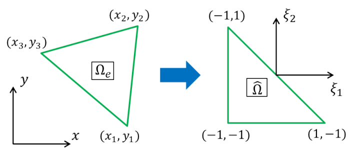
式 (1) に対し，試験関数 r を掛けて積分を行い，第 2,3 項に対し，Gauss の発散定理を用いると以下の式が得られる．

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_e}\frac{\partial U}{\partial t}rd\Omega-\int_{\Omega_e}F(U)\frac{\partial r}{\partial x}d\Omega+\int_{\partial\Omega_e}F\cdot n_x r ds\\ -\int_{\Omega_e}G(U)\frac{\partial r}{\partial y}d\Omega+\int_{\partial\Omega_e}G\cdot n_y r ds=0.\end{aligned} \tag{5}$$

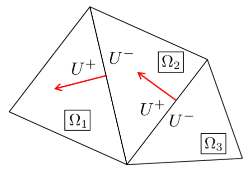
ここで，n_x，n_y は単位法線ベクトルの x，y 方向成分である．また，物理量と試験関数の近似式は以下に示す線形和で表される．

$$U\approx U_h=\sum_{i=0}^{N}U_i(t)\phi_i(x,y), \tag{6}$$

$$r\approx r_h=\sum_{j=0}^{N}\alpha_i\phi_j(x,y), \tag{7}$$



図－1　座標変換



図－2　U^+,U^- の定義

ここで，$U_i(t)$ は自由度，$\phi(x,y)$ は Dubiner の基底関数[1)]，α_i は任意定数である．これらを式 (5) に代入すると次式が得られる．

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_e}\frac{\partial U_i}{\partial t}\phi_i\phi_j d\Omega-\int_{\Omega_e}F(U_i\phi_i)\frac{\partial\phi_j}{\partial x}d\Omega+\int_{\partial\Omega_e}F(U_i\phi_i)\cdot n_x\phi_j ds\\ -\int_{\Omega_e}G(U_i\phi_i)\frac{\partial\phi_j}{\partial y}d\Omega+\int_{\partial\Omega_e}G(U_i\phi_i)\cdot n_y\phi_j ds=0.\end{aligned} \tag{8}$$

式 (8) の各項において積分を評価するために，Gauss の数値積分法を用いる．この際，**図－1** に示すように，一般化座標への座標変換を行う．

要素境界において保存性を満足させるために，数値流束を導入する．本研究では，次式で定義される Local Lax-Friedrichs Flux[2)] を用いる．

$$\hat{E}=\frac{1}{2}\Big\{\Big(E_n(U^+)+E_n(U^-)\Big)-a_{max}\Big(U^+-U^-\Big)\Big\}. \tag{9}$$

ここで，E_n，a_{max} はそれぞれ以下のように定義される．

$$E_n=Fn_x+Gn_y, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}a_{max}=max\Big(&|\lambda_1(U^+)|,|\lambda_2(U^+)|,|\lambda_3(U^+)|,\\ &|\lambda_1(U^-)|,|\lambda_2(U^-)|,|\lambda_3(U^-)|\Big),\end{aligned} \tag{11}$$

$$\lambda_1=un_x+vn_y-\sqrt{gh}, \tag{12}$$

$$\lambda_2=un_x+vn_y, \tag{13}$$

$$\lambda_3=un_x+vn_y+\sqrt{gh}. \tag{14}$$

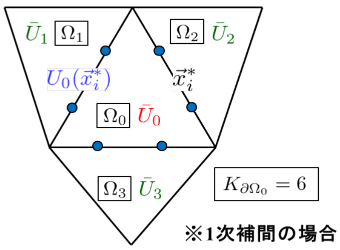
また，要素境界における不連続な物理量 U^+,U^- は，**図－2** に示すように，法線ベクトルが向く方向の値を U^+，もう一方の値を U^- と定義する．

以上により，半離散化方程式が以下のように得られる．

$$M\dot{U}_i=A_fF+A_gG-B\hat{E}. \tag{15}$$

ここで，M，A_f，A_g，B はそれぞれ質量行列，流束 F，G 項の係数行列，数値流束 $\hat{E}$ 項の係数行列である．

KeyWords：　津波，浅水長波方程式，Discontinuous Galerkin 法，Runge-Kutta 法，Limiter 処理
連絡先：　〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27　TEL 03-3817-1808　E-mail s.ito@civil.chuo-u.ac.jp



図－3　Limiter 処理に関する変数

(3)　時間方向の離散化

式 (15) の質量行列 M は，Dubiner の基底関数が直交性を有するために，対角行列となる．ゆえに，陽的解法を用いることができる．本研究では，$p+1$ 段階，$p+1$ 次の Runge-Kutta 法を用いる．ここで，p は補間次数である．

(4)　Limiter 処理

数値振動を抑えるために，各要素において，物理量 U の近似式である式 (6) に対し，Krivodonova 等によって提案された以下に示す Limiter 処理[3] を導入する．

$$U_h(t,\vec{x}) = U_1(t)\phi_1(\vec{x}) + \alpha[U_2(t)\phi_2(\vec{x}) + U_3(t)\phi_3(\vec{x})], \tag{16}$$

$$\alpha = \min_{1\le i\le K_{\partial\Omega_0}} max(\alpha_i, 0), \tag{17}$$

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{M-\bar{U}_0}{U_0(\vec{x}_i^*)-\bar{U}_0} & (U_0(\vec{x}_i^*) - M > 0) \\ \frac{m-\bar{U}_0}{U_0(\vec{x}_i^*)-\bar{U}_0} & (U_0(\vec{x}_i^*) - m < 0) \\ 1 & (otherwise). \end{cases} \tag{18}$$

ここで，**図－3** に示すように，$K_{\partial\Omega_0}$ は着目要素 Ω_0 の辺上の積分点の総数（各辺における積分点数は補間次数 +1 個），$\vec{x}_i^*$ は辺上の積分点の座標，$U_0(\vec{x}_i^*)$ は辺上の積分点における物理量，$\bar{U}_0$ は着目要素 Ω_0 の物理量の平均値，M と m はそれぞれ隣接要素の物理量の平均値 $\bar{U}_{1,2,3}$ の中での最大値と最小値である．

3.　数値解析例

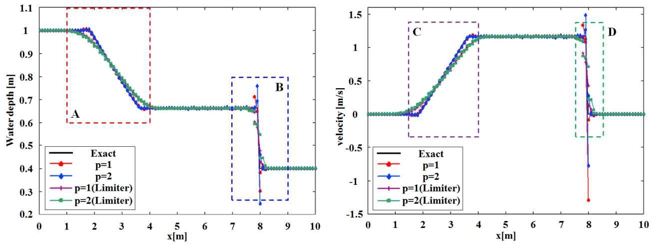
1 次，2 次補間の DG 法における Limiter 処理の効果の検討を行うために，数値解析例として水路中心より左側の初期水深を 1.0m，右側の初期水深を 0.4m と仮定した段波問題を取り上げる．

(1)　解析条件

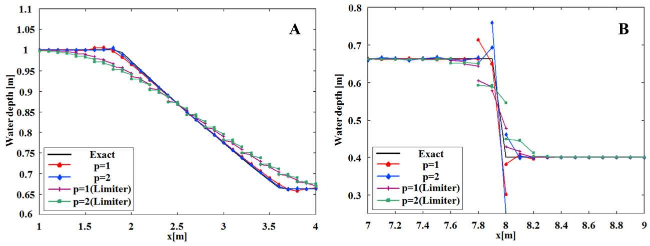
メッシュ幅 Δx は 0.1m，Δy は 0.2m，両壁面で slip 条件とし，微小時間増分量は 0.001s とする．

(2)　解析結果

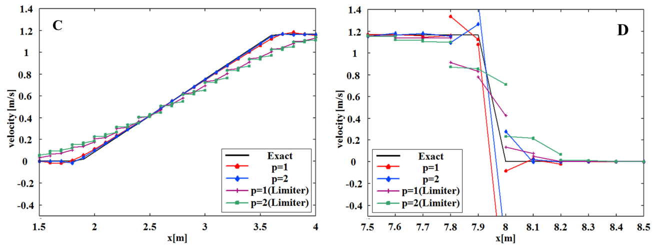
図－4 は 1.0s 後の水面形状と流速分布を，厳密解と 1 次，2 次補間の DG 法において Limiter 処理の有無での結果を比較したものである．また，**図－5，6** は**図－4** における A,B,C,D 領域を拡大したものである．まず，勾配が滑らかである A,C 領域における結果より，1 次，2 次補間による解析のどちらも，Limiter 処理を導入しない場合は，厳密解と良い一致を示していることが確認できる．一方，Limiter 処理を導入した場合は，過度ななまりが生じていることが確認できる．次に，不連続的な領域である B,D 領域における結果より，1 次，2 次補間による解析のどちらも，Limiter 処理を導入しない場合は，不連続面の勾配を精度よく表現できているが，数値振動が大きく現れていることが確認できる．Limiter 処理を導入した場合は，数値振動が抑えらていることが確認できる．以上のことから，より高精度な解析結果を得るためには，不連続的な領域の特定と，特定した領域のみへの Limiter 処理の導入が必要であるといえる．



図－4　1.0s 後の水面形状 (左図) と流速分布 (右図)



図－5　1.0s 後の水面形状の A 領域 (左図) と B 領域 (右図)



図－6　1.0s 後の流速分布の C 領域 (左図) と D 領域 (右図)

4.　おわりに

本研究では，浅水長波方程式に対して DG 法を適用し，段波問題において 1 次，2 次補間の DG 法における Limiter 処理の効果の検討を行い，以下の結論を得た．

- 勾配が滑らかな領域においては，1 次，2 次補間のどちらにおいても Limiter 処理の導入により，過度ななまりが生じることが確認できた．
- 不連続的な領域においては，1 次，2 次補間のどちらにおいても Limiter 処理の導入により，数値振動が抑えられることが確認できた．

今後の課題としては，不連続的な領域を特定する指標の導入と，特定した領域のみへの Limiter 処理の導入等が挙げられる．

参考文献

1) M. Dubiner : Spectral Methods on Triangles and Other Domains, *Sci. Comput.*, Vol.6, Issue.4, pp.345-390, 1991.

2) B. Cockburn, C.W. Shu : The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: multidimensional systems, *Comput. Phys.*, Vol.141, Issue.2, pp.199-224, 1998.

3) L. Krivodonova, J. Xin, J. F. Remacle, N. Chevaugeon, J. E. Flacherty : Shock detection and limiting with discontinuous Galerkin methods for hyperbolic conservation laws, *Applied Numerical Mathematics*, Vol.48, Issue.3-4, pp.323-338, 2004.