開水路床の隆起により生じる水面形の解析解に関する研究

中央大学大学院　学生会員　○諸岡　雅樹
中央大学大学院　学生会員　小石　一宇
中央大学　フェロー会員　山田　正

１．はじめに

河川における水面形は河道の狭窄部や河床凹凸の存在によって形状を変える．河床凹凸による影響の例として定在波(波状跳水)が挙げられる．定在波が生じると水深を増加させるが，特に河川水位が上昇する洪水時において，水面に定在波が形成された場合，堤防を越流し河川氾濫の一因となることが懸念される．以上のことから河床の形状の影響により生じる水面形の全容を把握することは治水計画上重要である．

一次元開水路において縦断的に非一様な河床の影響によって生じる水面形の解析解は，銭，山田 [1]によって導かれた．しかし，実際の河川を考えると，河床は横断的にも縦断的にも非一様であることがほとんどであるにも関わらず，縦断及び横断的に非一様な河床の影響によって生じる水面形の解析解はない．そこで，著者らは二次元開水路における非一様な河床の影響によって生じる水面形の解析解を求めるための基礎的研究として，摩擦抵抗や渦粘性，渦拡散を考慮しない最もシンプルな場合の流れを考え，水深に比べて十分小さい隆起が存在する開水路流れにおいて，摂動法により線形化した連続式および運動方程式を用いて水面形の解析解を導出した [2]．この解析解は畳み込み積分の形をしている．

本研究では，上記の開水路において 3 次元ポテンシャル流れを仮定し，水面および河床面での力学的境界条件，運動学的境界条件を用いて水面形の解析解を導出し，水理実験による実験値との比較を行い，その妥当性を検証した．

２．河床隆起により生じる水面形の解析解の導出

２−１．速度ポテンシャルを用いて導出した解析解

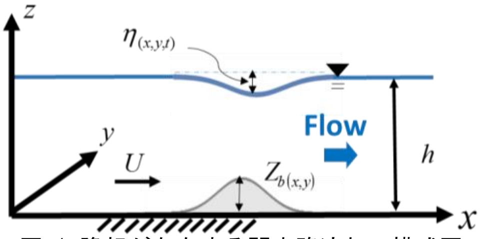
本研究で対象とする開水路流れは，水深に比べ微小な隆起が河床に存在する流れを対象とする．模式図を**図−1**に示す．h は等流水深[m]，$\eta_{(x,y)}$ は隆起によって生じる水面の変位[m]，$Z_{b(x,y)}$ は隆起の高さ[m] ($h >> Z_b$)，Uは流速[ms^{-1}]，gは重力加速度[ms^{-2}]，また，流れは定常とする．　ここで，3次元ポテンシャル流れを仮定した場合の連続式と速度ポテンシャルを(1)式および(2)式に示す．

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0 \tag{1}$$

$$\Phi_{(x,y,z)}=Ux+\phi_{(x,y,z)} \tag{2}$$

(2)式における $\varphi_{(x,y,z)}$は河床隆起によって生じる微小な擾乱を示す速度ポテンシャルである．この速度ポテンシャル $\varphi_{(x,y,z)}$ を x, y, z で微分することにより，河床隆起により生じる微小な流速の各方向成分となる．

また，(1)式および(2)式に示す 3 次元ポテンシャル流れに対する力学的境界条件は(3)式，運動学的境界条件は(4)式および(5)式である．



図−1　隆起が存在する開水路流れの模式図

$$z=0: \quad g\eta+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right\}=const. \tag{3}$$

$$z=0: \quad U\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial\Phi}{\partial z} \tag{4}$$

$$z=-h: \quad U\frac{\partial Z_{b(x,y)}}{\partial x}=\frac{\partial\Phi}{\partial z} \tag{5}$$

以上の境界条件のもとで(1)式を解くと，(6)式に示す速度ポテンシャル $\Phi_{(x,y,z)}$および(7)式に示す河床隆起により生じる水面形の解析解がそれぞれ得られる．

$$\Phi_{(x,y,z)}=Ux-\frac{U}{\beta}\frac{\cosh\beta z+\left(Fr^2k^2h/\beta\right)\sinh\beta z}{\sinh\beta h-\left(Fr^2k^2h/\beta\right)\cosh\beta h}\frac{\partial Z_{b(x,y)}}{\partial x} \tag{6}$$

$$\eta_{(x,y)}=\frac{U^2}{g\beta\left\{\sinh\beta h-\left(Fr^2k^2h/\beta\right)\cosh\beta h\right\}}\frac{\partial^2 Z_{b(x,y)}}{\partial x^2} \tag{7}$$

ここに, k は流下方向における河床隆起の波数であり, l は幅方向における河床隆起の波数である．また，β および上流側の隆起により生じる擾乱の影響を受けない地点におけるフルード数 Fr を以下(8)，(9)式に示す．

$$\beta=\sqrt{k^2+l^2} \tag{8}$$

$$Fr=U^2\big/\sqrt{gh} \tag{9}$$

２−２．摂動法を用いて導出した解析解

以下では摂動法により線形化した連続式および運動方程式を用いて，水面形の解析解を導出する．連続式を(10)式，運動方程式を(11)，(12)式に示す．

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial(uH)}{\partial x}+\frac{\partial(vH)}{\partial y}=0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-g\frac{\partial\eta}{\partial x} \tag{11}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-g\frac{\partial\eta}{\partial y} \tag{12}$$

$$H=h+\eta-Z_b \tag{13}$$

$$u=U+u' \quad , \quad v=v' \tag{14}$$

ここに, u, v は流速の x, y 方向成分である．また，u'，v'はそれぞれ河床隆起により生じる微小な速度の x，y 方向成分である($U>>u'$，v')．H は水位である．以上の式に関して線形化を行い, 整理したものが(15)

キーワード　水理学，水面形，解析解，ポテンシャル流れ，水理実験
連絡先　〒112-8551　東京都文京区春日 1-13-27 中央大学 理工学部 TEL03-3817-1805

式に示す水面形の解析解である．

$$\eta_{(x,y)}=\frac{-Fr^2}{2\pi\left(1-Fr^2\right)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 Z_{b(\xi,\zeta)}}{\partial\xi^2}\log\sqrt{\frac{1}{1-Fr^2}(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2}\,d\xi d\zeta \quad (15)$$

ここに，ξ，ζ は畳み込み積分上用いる，x，y 方向に対応した変数である．

３．水理実験（検証実験）

前章で導いた水面形の解析解である(7)式および(15)式の妥当性を検証するために，開水路実験を行った．実験には全長 8 m，幅 60 cm で河床勾配を変えることのできる開水路を用いた．なお，開水路実験は 2 種類の河床隆起を用いて計 2case 行った．以下(16)式は case1 に用いた隆起，(17)式は case2 に用いた河床隆起を示す．

$$Z_{b(x,y)}=2.0\exp\left(-\frac{x^2}{300}\right)\left(Unitstep[y+3]-Unitstep[y-3]\right) \quad (16)$$

$$Z_{b(x,y)}=1.0\exp\left(-\frac{x^2}{300}\right)1.0\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \quad (17)$$

また、実験の条件を**表−1** に示す．河床隆起は実験水路下流端から 5 m 地点に設置した．河床隆起の中央，中央から左側 9 cm，18 cm の計 3 測線の水深を単一隆起の頂点を原点として上，下流側にそれぞれ 2 m，計 4 m の区間に対してサーボ式波高計を用いて計測した．

４．結果・考察

図−3 に実験の模式図および実験結果の判例を示す．図−4 および**図−5** に，実験により得た結果と解析によって得た結果を示す．水路中央，特に河床隆起直上で両解析解と実測値が概ね一致しているが，中央から左岸側 9 cm，18 cm，すなわち水路側壁に近づくにつれ，両解析解と実測値との差が大きくなる．これは実験水路の側壁に衝突した流れにより，水面の変化が大きく生じたと考えられる． 河床隆起の影響によって生じる水面の実測値，および両解析解の凹凸の位置に着目すると，本研究で導いた解析解(7)式および(16)式双方の位置が一致しており，本研究で導いた解析解は実験時に開水路で発生させた水面形の傾向を捉えていると考えられる．また，解析解(7)式において，河床隆起を流下方向に二回微分した項があるが，その影響が特に両 case 水路中央における水面形に現れている．両 case の実測値に着目すると，上流から下流にかけて水深が徐々に減少している．これは実験水路下流端における段落ちによる影響である．

５．まとめ

1) 3次元ポテンシャル流れの仮定の下，縦断及び横断的に非一様な河床の影響によって生じる水面形の解析解を求めた．

2)本研究で求めた解析解と，水路実験による実測値との比較を行い，求めた解析解の妥当性を確認した．

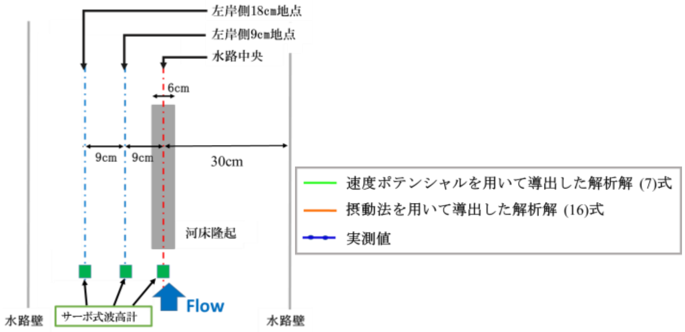
６．参考文献

1)銭潮潮，山田正:開水路断面の不均一性に起因する不等流の水面形形成に関する基礎的研究，水利科学 No. 336，65-99，2014.

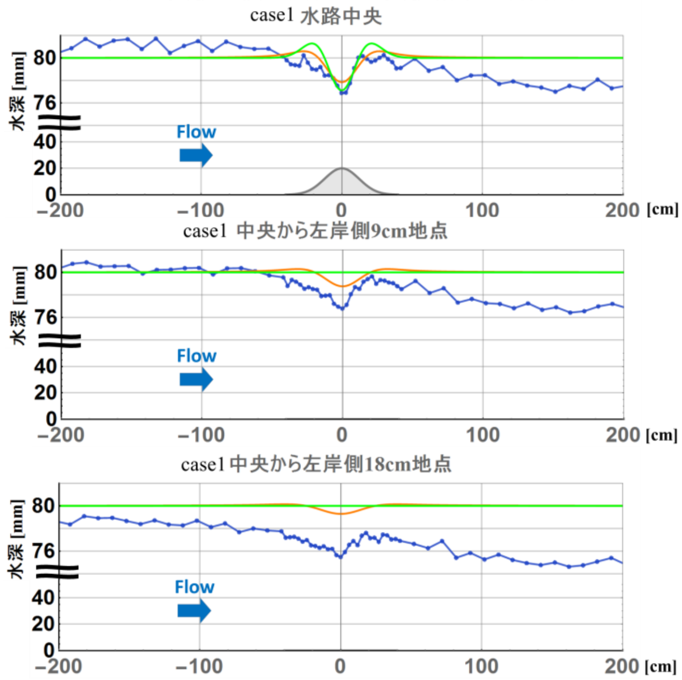
2)諸岡雅樹，山田正:開水路床に存在する単一隆起の影響によって生じる水面形に関する研究，土木学会第 71 回年次学術講演会，Ⅱ-090，2016.

表−1 実験の条件

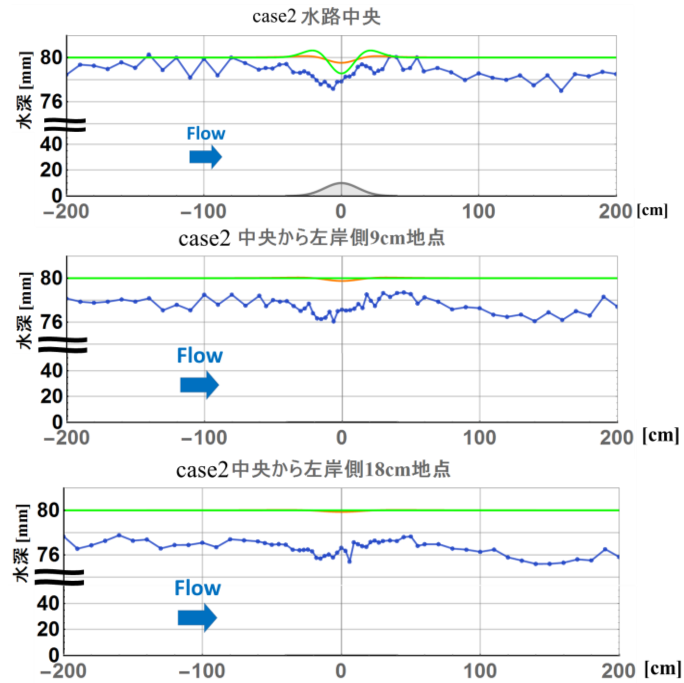
case	河床隆起の形状	流量 [L/分]	隆起最長部高さ [cm]	上流側等流水深地点Froude数	隆起全長 [cm]	河床隆起幅 [cm]
1	(17)式	1500	2	0.58	80	6
2	(18)式	1500	1	0.58	80	6



図−3 実験の模式図および実験結果の判例図



図−4 case1 実験結果



図−5 case2 実験結果