

2次元動弾性問題に対する演算子積分時間領域 アイソジオメトリック境界要素法

○群馬大学理工学部 学生会員 伊藤 司
群馬大学大学院理工学部 学生会員 市川 諒
群馬大学大学院理工学部 正会員 斎藤 隆泰

1. はじめに

本研究では、アイソジオメトリック解析 (IGA) を 2 次元動弾性問題における演算子積分時間領域境界要素法¹⁾へ適用する。IGA は Brazilevs ら²⁾が提案した解析手法であり、有限要素法における空間形状を CAD の形状関数である NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline) で補間したものである。そのため IGA を用いれば、CAD で作成したモデルを直接数値解析に用いることが可能となる。近年、著者らはこの IGA を演算子積分時間領域境界要素法に適用した演算子積分時間領域アイソジオメトリック境界要素法 (CQ-IGBEM) を開発し、2 次元面外波動伝搬問題を解析してきた。そこで、本研究では、CQ-IGBEM を 2 次元動弾性問題に拡張する。以下では、2 次元動弾性問題に対する定式化の概要を説明した後、数値解析例を示すことで、本手法の妥当性を検討する。

2. 解くべき問題

以下では、直交座標系 (x_1, x_2) を用い、 $(\cdot)_{,i}$ は x_i による空間微分、 $(\cdot)$ は時間微分を示すものとする。図 1 のような等方弾性体の無限領域 Ω 内における散乱体 $\bar{\Omega}$ による弾性波動の散乱問題を考える。入射波 u_i^{in} は、散乱体 $\bar{\Omega}$ の境界表面 Γ により反射・散乱される。このとき、変位 u_i が満たす支配方程式は、次のように表される。

$$\mu u_{i,jj}(\mathbf{x}, t) + (\lambda + \mu) u_{j,ji}(\mathbf{x}, t) = \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}, t) \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

ただし、 ρ は密度、 λ, μ はラメ定数を表す。この問題の解は、次の時間領域境界積分方程式を解くことにより求まる。

$$C_{ij}(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}, t) = u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * t_j(\mathbf{y}, t) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * u_j(\mathbf{y}, t) d\Gamma_y \quad (2)$$

ここで、 $C_{ij}(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x}$ における空間形状に依存する自由項、 $U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ 、 $T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ はそれぞれ 2 次元弾性波動問題における時間領域基本解および対応する二重層核である。また、 $*$ は畳込み積分、 $t_j(\mathbf{y}, t)$ は表面力を表す。

3. 演算子積分法を用いた時間方向の離散化

従来の時間領域境界積分方程式では、式 (2) の計算は、時間増分が小さい場合に解が不安定になる。そこで、式 (2) の畳込み積分の離散化に、Lubich が提案した演算子積分法 (CQM: Convolution Quadrature Method)³⁾ を適用する。なお、演算子積分法の詳細については文献³⁾等を参照されたい。

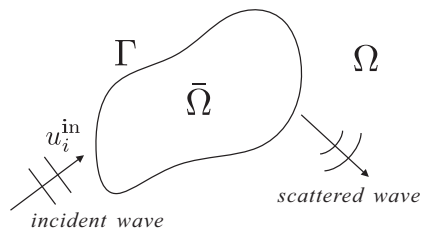


図 1 入射波による外部散乱問題

4. NURBS 基底関数

NURBS 基底関数 $R_d^p(\xi)$ は次式で与えられる。

$$R_d^p(\xi) = \frac{N_d^p(\xi) w_d}{\sum_{d=1}^n N_d^p(\xi) w_d} \quad (3)$$

ここで、 p は次数、 n は制御点の数、 ξ はノットベクトル、 w_d は制御点での重み、 N_d^p は B-Spline 基底関数²⁾である。

5. 空間方向の離散化

境界上において、空間領域の近似基底 $\phi_I(\mathbf{x})$ を導入し、NURBS 基底関数 $R_d^p(\xi)$ との関係 $\phi_I(\mathbf{x}(\xi)) \equiv R_d^p(\xi)$ (ただし、 $d = (i, I)$)⁴⁾を用いて表すと、境界値 $u_j(\mathbf{x}, t)$ 、 $t_j(\mathbf{x}, t)$ は

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \sum_I \phi_I(\mathbf{x}(\xi)) u_{i,I}(t) \quad (4)$$

$$t_i(\mathbf{x}, t) = \sum_I \phi_I(\mathbf{x}(\xi)) t_{i,I}(t) \quad (5)$$

で表せる。ここで、 I は近似基底の次数である。式 (2) を時間に関して演算子積分法で離散化し、空間に関して式 (4)、(5) を適用すると、時間増分を Δt として以下の離散化された時間領域境界積分方程式を得る。

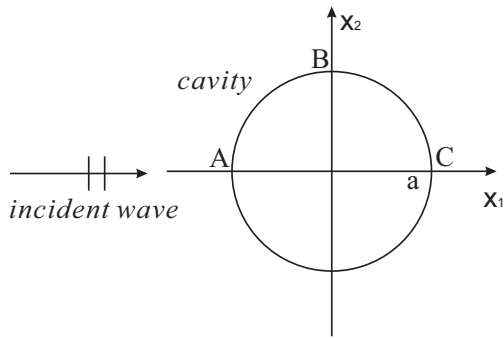
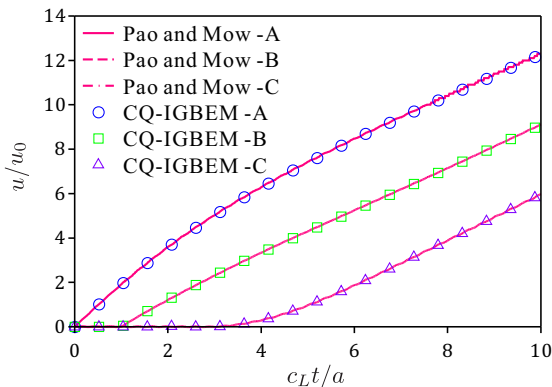
$$C_{ij}(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}, n\Delta t) = u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) + \sum_I \sum_{k=1}^n \left[A_{ij,I}^{n-k}(\mathbf{x}) t_{j,I}(k\Delta t) - B_{ij,I}^{n-k}(\mathbf{x}) u_{j,I}(k\Delta t) \right] \quad (6)$$

ここで、影響関数 $A_{ij,I}^{n-k}$ 、 $B_{ij,I}^{n-k}$ は次式で与えられる。

$$A_{ij,I}^m(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_{\xi} \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\xi), s_l) \phi_I(\mathbf{y}(\xi)) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} J(\xi) d\xi \quad (7)$$

$$B_{ij,I}^m(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_{\xi} \hat{S}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\xi), s_l) \phi_I(\mathbf{y}(\xi)) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} J(\xi) d\xi \quad (8)$$

ただし、 i は虚数単位、 $\mathcal{R}, L$ は演算子積分法のパラメータである。また、 $\hat{U}_{ij}$ 、 $\hat{S}_{ij}$ はラプラス変換域における基本解及び対応する二重層核、 $J(\xi)$ は NURBS 基底関数を導入した際に現れるヤコビアンである。

図2 半径 a の空洞による入射波の散乱解析モデル図3 A, B, C 点における u/u_0 の時間変化 (Pao-Mow の解との精度比較)

6. 時間ステップ解析

式 (6) に式 (7), 式 (8) を用いて境界 Γ を M 個の要素で離散化すれば, 第 n ステップにおいて次の方程式を得る.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}u_{i,I}(\mathbf{x}, n\Delta t) + \sum_I^M \left[A_{ij,I}^0(\mathbf{x})t_{j,I}(n\Delta t) - B_{ij,I}^0(\mathbf{x})u_{j,I}(n\Delta t) \right] \\ &= u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) + \\ & \sum_I^M \sum_{k=1}^{n-1} \left[A_{ij,I}^{n-k}(\mathbf{x})t_{j,I}(k\Delta t) - B_{ij,I}^{n-k}(\mathbf{x})u_{j,I}(k\Delta t) \right] \quad (9) \end{aligned}$$

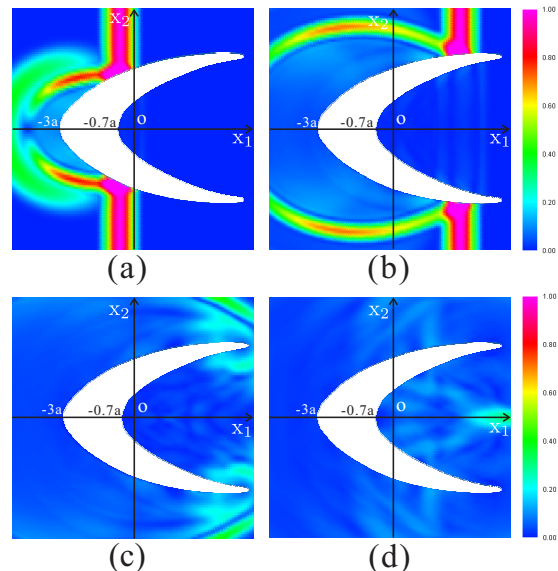
式 (9) に初期条件, 境界条件を考慮することで, $n = 1$ から始めて, 順番に境界未知量を求めることができる.

7. 数値解析例

以下, ボアソン比 0.25 の等方弾性体に対して解析を行った. まず, 提案手法の精度確認を行う. 今, 図 2 中に示す原点中心, 半径 a の円形空洞の解析モデルに対する散乱問題を考える. 入射波は次のように与えた.

$$u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = u_0 \delta_{i1} [(c_L t - x_1 - a)/a] H(c_L t - x_1 - a) \quad (10)$$

ただし, u_0 は振幅, H は単位階段関数, c_L は縦波速度である. 円形空洞は CAD で作成し, 要素数 M は $M = 32$ とした. また, 総時間ステップ数 N は $N = 1024$, 時間増分は $c_L \Delta t/a \simeq 0.0173$ とした. 図 3 は図 2 中の A, B, C 点での全変位の時刻歴波形を示している. 比較のため, Pao-Mow による周波数領域での解析解を FFT によって逆フーリエ変換して得られた時間領域の解を実線で示してある. 図 3 より,

図4 双曲形空洞周辺の面内変位場 (a) $c_T t/a = 2.0$ (b) $c_T t/a = 4.0$ (c) $c_T t/a = 6.0$ (d) $c_T t/a = 8.0$

両者は良く一致しており, 提案手法は妥当であることが確認された.

次に, 散乱体の形状を変化させた解析例を示す. 解析モデルは頂点が $(-3a, 0)$, 縦幅 $6.1a$, 横幅 $7.45a$ の双曲形空洞とした. ここで, 空間形状については精度確認の時と同様に CAD で作成し, 1 波長に対して十分な要素, 節点を配置できるようにノットの挿入等を行い, ノットベクトル, 制御点などを出力した. また, 要素数は $M = 88$, 解析パラメータは円形空洞の時と同様とし, 入射波は次の平面波を与えた.

$$u^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = \frac{u_0}{2} (1 - \cos 2\pi\alpha) \quad (11)$$

$$\alpha = \begin{cases} \frac{c_L}{\lambda} \left(t - \frac{x_1 + a}{c_L} \right) & \text{for } (0 \leq \alpha \leq 1) \\ 0 & \text{for otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

ここで, λ は波長である. 横波速度を c_T として, 図 4(a)-(d) はそれぞれ $c_T t/a = 2.0, 4.0, 6.0, 8.0$ における双曲形空洞周辺の全変位場を示している. 入射波が空洞に到達し, 散乱されている様子が見て取れ, 妥当な結果が得られていると言える.

8. おわりに

2 次元動弾性問題に対する CQ-IGBEM の定式化を行った. 数値解析を行い, 提案手法の妥当性を示した. 今後は, 3 次元問題への拡張や, これらの高速化を行う予定である.

参考文献

- 1) T. Saitoh, T. Ishida, T. Fukui and S. Hirose: Development of a time-domain fast multipole BEM based on the operational quadrature method in 2-D elastodynamics, *Advances in Boundary Element Techniques IX*, pp.339-346, 2008.
- 2) Bazilevs, Y., Cottrell, J. A. and Hughes, T. j. R.: *Isogeometric Analysis, Toward Integration of CAD and FEA*, John Wiley and Sons, 2009.
- 3) Lubich, C.: Convolution quadrature and discretized operational calculus I and II, *Number Math* 52, pp.129-145 and pp.413-425.
- 4) Simpson, R. N., Boradas, S. P. A., Trevelyan, J. and Rabczuk, T.: A two-dimensional isogeometric boundary element method for elastostatic analysis, *Comput Method Appl. Mech. Engrg.* 209-212, pp.87-100, 2012.