

時間反転法を用いた2次元異方性材料中の欠陥形状再構成に関する研究

群馬大学 工学部 学生会員 ○大芦健太
群馬大学 大学院理工学府 正会員 斎藤隆泰

1. はじめに

近年, 種々の構造物内部の欠陥の有無を調べる方法として, 超音波非破壊評価法が重要視されている. 超音波非破壊評価法の最終目的は, 欠陥の位置, 大きさ, 分布等を推定することにある. 欠陥推定のための代表的な手法として, 開口合成法が知られている. 開口合成法は, 等方性材料のように路程が容易に推定できる場合は有効であるが, 音響異方性を示す材料に対しては直接の適用は困難である. そこで, 本研究では, 音響異方性を示す材料中の欠陥に対し, 時間反転法¹⁾²⁾を適用することで欠陥形状再構成を試みる. 以下では, まず, 時間反転法についての概念を述べる. 次に, 時間反転法を用いた逆伝搬解析のために用いるFDTD法について説明する. そして異方性弾性波動論について簡単に説明した後, 最後に数値解析結果を示し, 本手法の有用性について検討する.

2. 時間反転法

時間反転法は, 弾性波伝搬の時間に対する可逆性を利用したものである. 欠陥の位置ベクトルを $\mathbf{r}_0$, 散乱波の受信点の位置ベクトルを $\mathbf{r}$ とする. 時刻 t_0 , 位置 $\mathbf{r}_0$ で発生した波動が時刻 t で散乱波の受信点 $\mathbf{r}$ で計測されるとき, その応答は基本解 $G(\mathbf{r}_0, t_0 | \mathbf{r}, t)$ を用いて表すことができる. この関数は時間について可逆であり,

$$G(\mathbf{r}_0, t_0 | \mathbf{r}, t) = G(\mathbf{r}_0, t | \mathbf{r}, t_0) \quad (1)$$

と表すことができる. 今, 散乱波の受信点の総数を N とすると, 欠陥を散乱源(ソース点)と考えた時の i 番目の散乱波の受信点($i = 1, \dots, N$)で観測される波動は次のように表される.

$$h_i(\mathbf{r}_0, t) = \int_{S_i} G(\mathbf{r}_0, t_0 | \mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \quad (2)$$

ここで, S_i は散乱波受信領域である. 式(2)で示した波動を, 図1(b)のように反転して対象材料に送信する. この時, 散乱源における波動は次のような畳み込みで表される.

$$h_i^D(\mathbf{r}_0, t, T) = h_i(\mathbf{r}_0, t) * h_i(\mathbf{r}_0, T - t) \quad (3)$$

散乱波の受信点は N 個あるから, それぞれの寄与を重ね合わせると,

$$P(\mathbf{r}_0, t, T) = \sum_{i=1}^N h_i^D(\mathbf{r}_0, t, T) \quad (4)$$

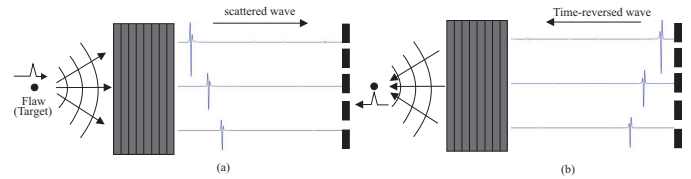


図1 時間反転法の概念図 (a) 欠陥からの散乱波形の受信 (b) 散乱波形の時間反転波を送信.

となる. 波動場は時間について可逆であるから, 時間反転した波動をそれぞれの受信点から送信すれば, 時刻 T 後には $\mathbf{r}_0$ の位置で P が最大値をとる.

以上より, FDTD法により模擬散乱波形である $h_i(\mathbf{r}_0, t)$ を取得し, これを時間反転して材料に送信する. そして, 波動解析手法であるFDTD法を用いて式(4)の P , すなわち異方性材料中の欠陥の位置を数値的に求める.

3. FDTD法を用いた異方性弾性波動解析

以下では, 異方性材料として, 一方向炭素繊維強化プラスチックを扱う. 簡単のため, 面外方向を x_2 軸方向とした面外問題を扱う. 位置 $\mathbf{x}$, 時刻 t における面外波動場 $u_2(\mathbf{x}, t)$ に対する運動方程式, 構成方程式はそれぞれ次のように表される.

$$\rho \ddot{u}_2 = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial t} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{44} & C_{46} \\ C_{64} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{pmatrix} \quad (6)$$

ただし, σ_{ij} は応力, ρ は密度, $C_{\alpha\beta}$ はフオークト表記された弾性定数, $(\dot{})$ は時間微分を表す. ただし, 異方性弾性体では, C_{46}, C_{64} は等方弾性体の場合と異なりゼロとならないことに注意する. FDTD法では式(5)の運動方程式, および式(6)の構成方程式に対して, 速度と応力を差分格子上で互い違いに計算することで, 各時間ステップにおける差分格子上的未知量を求めていく. 面内波動場についても, 対応する運動方程式, 構成方程式を同様の手順で離散化することにより求まる. これらの詳細については, 文献³⁾等を参照されたい.

4. 異方性弾性波動論と群速度曲線

解析に先立ち, 本節では異方性材料中を伝搬する波動を考察するために必要な異方性弾性波動論についてまとめておく.

(1) 異方性弾性波動論

異方性弾性体中を伝搬する超音波は、強い音響異方性を示し、位相速度や群速度は伝搬方向に依存する。そのため、異方性材料を検査する前に、その異方性材料中を伝搬する超音波の方向依存性を明らかにしておくことが望ましい。運動方程式に平面波を代入し、物体力 b_i を無視すれば、次の Christoffel 方程式を得る。

$$(\Gamma_{ik}(\mathbf{n}) - \rho c^2 \delta_{ik}) d_k = 0 \quad (7)$$

ここで、 δ_{ik} はクロネッカーデルタ、 d_k は偏向方向ベクトル成分、 $\mathbf{n}$ は波動の伝搬方向ベクトル、 Γ_{ik} は Christoffel テンソルである。異方性弾性波動論では、式 (7) は固有値問題に帰着され、その固有値問題を解くと、 m 番目の固有ベクトル d_k^m に対応した3つの固有値 $\lambda^m (= \rho(c^m)^2)$ ($m = 1, 2, 3$) が得られる。各固有値 λ^m に対する位相速度 c^m は、 $c^m = \sqrt{\lambda^m / \rho}$ で求まる。Christoffel 方程式 $\Gamma_{ik}(\mathbf{n})$ は、波動の伝搬方向ベクトル $\mathbf{n}$ の関数であるため、適当な $\mathbf{n}$ を定めて式 (7) を解けば、波動の伝搬方向を $\mathbf{n}$ とした場合の偏向方向 d_k^m 、位相速度 c^m を求めることができる。

(2) 群速度曲線

一般に、異方性材料中では、位相速度と群速度は一致せず、位相速度が異なる波動が複雑に干渉し、群速度で伝搬する波面が形成される。よって、数値解析結果の妥当性を確認する上では、材料中を伝搬する波動の波面を追跡できると便利である。異方性材料の場合、次式を用いて群速度曲線を描くことができる。

$$g_j^m = \frac{1}{\rho c^m} C_{ijkl} d_i^m d_l^m n_k \quad (8)$$

式 (8) において、式 (7) で定めた伝搬方向ベクトル $\mathbf{n}$ 、偏向方向ベクトル d^m を与えれば、対応する群速度 g_j^m を求めることができる。

5. 数値解析例

数値解析例を示す。図 3(a),(b) における 20mm×50mm の一方向炭素繊維強化プラスチック中の 2mm×4mm の大きさのスリットを再構成する。想定する探傷条件は、解析モデル上面での散乱波の受信素子数 $N=64$ 、受信点間隔 0.05mm とした。入射波は解析モデル上表面の中央から中心周波数 2MHz のリッカー波を 1 波与えた。また $C_{44}=3.5$ 、 $C_{66}=7.07$ (単位は GPa)、密度は $\rho=1600(\text{kg}/\text{m}^3)$ で与えた。参考までに群速度曲線を図 2(a) に示す。比較のため等方性鋼材についても図 2(b) に示しておく。いずれも $\mathbf{n}=(0,1)$ の qS2 波、S 波速度で無次元化している。図 2(a) より、異方性を示す一方向炭素繊維強化プラスチック中では水平に速く伝搬していることが見て取れる。3 節で述べた FDTD 法を用いて各受信点における模擬散乱波形を求め、全素子でその結果に対して、時間反転した波形、すなわち時間反転波を再送信する。図 3(a),(b) に示すような FDTD 法を用いた

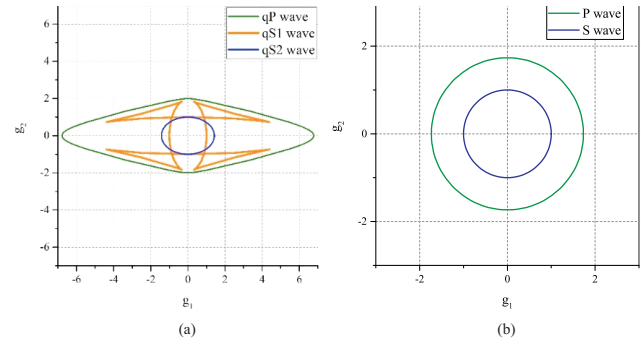


図 2 群速度曲線:(a) 式 (8) より描いた一方向炭素繊維強化プラスチックの群速度曲線 (b) 式 (8) より描いた等方性材料の群速度曲線。

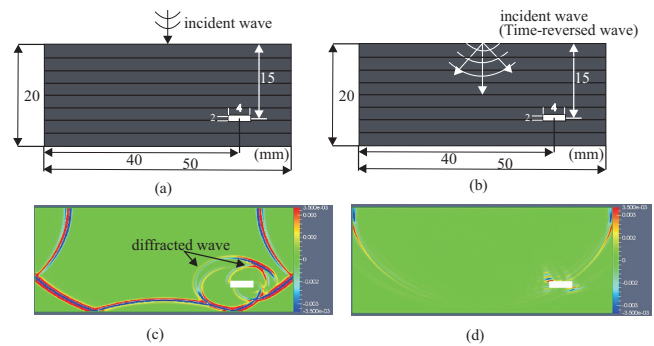


図 3 順解析及び逆解析結果:(a) 順解析 (b) 逆解析の欠陥位置に対する解析モデル (c) 順解析 (d) 逆解析の欠陥位置に対する解析結果。

順解析、時間反転法を用いた逆解析モデルそれぞれに対する結果を図 3(c),(d) に示す。図 3(c),(d) いずれにおいても、実際のスリットの位置と形状を白塗りで示してある。図 3(c) より図 2(a) の群速度曲線に従い、解析対象である qS2 波は水平に速く伝搬していることがわかる。また、スリット両端からの回折波の発生も見て取れる。また、図 3(d) より、模擬散乱波形を時間反転した波形、すなわち時間反転波を再送信することにより、欠陥位置を正しく特定できていることがわかる。これより、異方性材料に対する時間反転法を用いた逆伝搬解析法の有用性を示すことができた。

6. おわりに

一方向炭素繊維強化プラスチック中のスリットに対して、時間反転法を用いた逆伝搬解析法について示した。解析の対象として、純面外波動である qS2 波のみを扱った場合を示し、精度良くスリットの位置の特定を行うことができた。今後は、純面内波動である qP 波、qS1 波を扱った場合や一般の 3 次元異方性弾性体を扱う場合について検討する予定である。

参考文献

- 1) 中畑和之・斎藤隆泰・木本和志：波動伝搬シミュレーターを援用した時間反転法による非均質材料中の欠陥の映像化、超音波 TECHNO, Vol.27, No.1, pp.78-82, 2015.
- 2) K.Kimoto, K.Nakahata, T.Saitoh: An elastodynamic computational time-reversal method for shape reconstruction of traction-free scatterers, wave motion, 2017, (in press).
- 3) 佐藤雅弘著：FDTD 法による弾性振動・波動の解析入門、森北出版株式会社, 2003.