

流体の第二粘性係数が密度ベース圧縮性流れの数値解に及ぼす影響に関する研究

○筑波大学 学生会員 松浦 大志
筑波大学 学生会員 高橋 悠太
筑波大学 正会員 山本 亨輔

1. 研究背景

圧縮性流体の数値計算方法は圧力と密度の計算順序の違いによって密度ベースの解法と圧力ベースの解法に分けられる^[1]。密度を先に求める解法を密度ベースの解法といい、この解法ではマッハ数が小さい時、微小な密度の変化が非常に大きな圧力の変化を引き起こすため、密度の誤差に対して敏感になり、正しい解が得られないことがある。

既往の研究では、流体の体積粘性をゼロとするストークスの仮説に基づいている。そのため既往の研究では体積粘性が解に及ぼす影響については考慮されていない。体積粘性は流体の膨張圧縮に対する抵抗性を表し、この係数の影響を厳密に考慮することで、圧縮性流体の数値計算をより安定的に精度よく行うことができる可能性がある。

そこで本研究では、流体の体積粘性係数が密度ベースの解法の数値解に及ぼす影響について検討する。基礎方程式には圧縮性流体の連続の式、ナビエストークス方程式、内部エネルギー方程式、状態方程式を用いる。形状の自由度や高次精度化を考慮して、空間の離散化には有限要素法を用いる。キャビティ内自然対流問題を例題とし、理論解や既往の研究の結果と比較することで体積粘性の数値解に及ぼす影響を検討する。

2. 圧縮性流体の基礎方程式

流体の支配方程式は質量、運動量、エネルギーの3つの保存則と、理想気体の状態方程式を用いる。質量、運動量、熱力学的エネルギーの保存則を表す微分方程式は以下のようになる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = b_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (2)$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial e}{\partial x_j} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + J \quad (3)$$

ここで、 t は時間、 $x_j (j = 1, 2, 3)$ は直交座標系、 ρ は流体の密度、 u_j は速度の x_j 方向成分、 e は内部エネルギー、 b_i は単位質量あたりに働く体積力、 σ_{ij} は x_i 軸に垂直な面に働く x_j 方向の応力、 q_j は x_j 方向の熱流束、 J は単位体積当たりの発熱量である。

また、理想気体の状態方程式は以下のように表される。

$$p = \rho RT \quad (4)$$

ここで、 R は気体定数である。

一般にニュートン流体の応力は以下のような式で表される^[2]。

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (5)$$

ここで、 p は圧力、 μ は粘性係数、 λ は第二粘性係数、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタ、 ϵ_{ij} は次式で定義されるひずみ速度である。

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (6)$$

式(11)において対角成分の平均値を求めると、

$$\frac{\sigma_{kk}}{3} = -p + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \epsilon_{kk} \quad (7)$$

となり、このとき ϵ_{kk} の係数を体積粘性係数と呼ぶ。この体積粘性を0として、応力の対角成分の平均値が圧力に等しいとする仮定をストークスの仮説という。この仮定を導入すると、

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (8)$$

となって第二粘性は消去される。この仮定は厳密に正しいことが示されていないものの、多くの流体力学関係の研究で用いられている。本研究では第2粘性係数が密度の誤差に及ぼす影響を検討するため、 μ と λ は独立な定数として扱う。式(11)を式(2)、式(3)に代入し、熱流束がフーリエの法則に従うとすると、以下の式を得る。

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho b_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \quad (9)$$

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - p \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + J + \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 + \lambda \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \quad (10)$$

式(1)、式(9)、式(10)で、密度、速度、温度を陰的に扱い、Galarkin 法に基づく有限要素法^[4]によって離散化する。フローチャートを図1に示す。

3. 数値計算例

数値計算例としてキャビティ内自然対流を取り上げる。モデル概要を図2に、計算条件を表1に示す。モデルパラメータは、基準温度における空気の物性値を参照し、既往の研究同様、次式で定義されるレイリー数が 10^4 となるように定めた。

$$Ra = \frac{\beta g \Delta T L^3}{\alpha \nu} \quad (11)$$

4. 結果と考察

第二粘性係数を変えて計算を行い、以下の式で示されるモデルの全質量 m^n の初期値 m^1 からの変化を図3に示す。

$$m_{err}^n = \frac{m^n - m^1}{m^1} \quad (12)$$

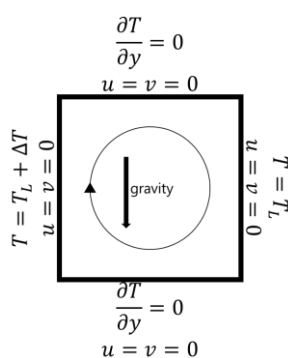
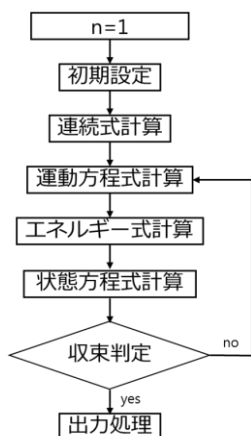


図1 フローチャート 図2 モデル概要

表1 モデルのパラメータ

モデル寸法	0.04[m] × 0.04[m]
基準温度	283.15[K]
温度差	1.465[K]
粘性係数	$1.6 \times 10^{-5} [Pa \cdot s]$
分割数	32 × 32
時間増分	0.01[s]

図3より、第二粘性係数が大きい方が全質量の誤差が小さく、質量保存則を高い精度で満足していることがわかる。次に、時間増分を2[s]、第2粘性係数と粘性係数の比を 10^{10} として $t = 60[s]$ まで計算を行った時の温度分布を図4に示す。温度分布は青木らによる結果^[3]と異なっていた。原因としては、第二粘性が大きいために浮力による流体の駆動が阻害され、対流による温度の伝播が妨げられていることが考えられる。

5. まとめ

本研究の結果から、流体の第二粘性は圧縮性流れの数値計算において質量の誤差に影響を及ぼすことがわかった。今後は、温度による密度の変化と流体に働く駆動力の関係についてさらに詳細に検討を行う予定である。

参考文献

- 1) 肖鋒,伊井仁志,小野寺直幸: 計算流体力学,コロナ社,2009
- 2) 清水昭比古,連続体力学の話法,森北出版,2012
- 3) 青木一真,牛島省,鳥生大祐: 圧縮性流体に対する保存型陰的計算アルゴリズムの提案,応用力学論文集,Vol.16, pp.51-58, 2013
- 4) 日本計算工学会流れの有限要素法研究委員会: 続・有限要素法による流れのシミュレーション,丸善出版,2012

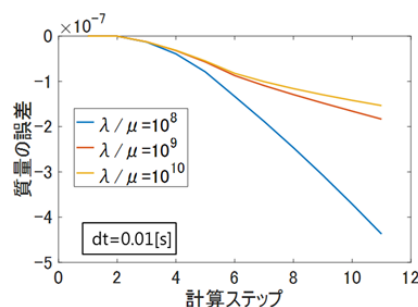


図3 質量の誤差

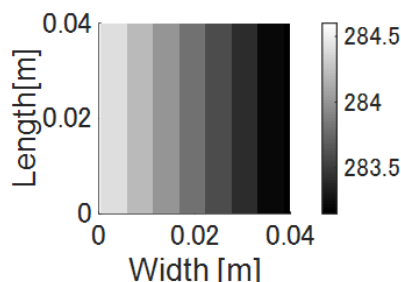


図4 温度分布