2次元弾性波動問題に対するイメージベース FEM・演算子積分時間領域BEM結合解法

群馬大学　大学院理工学府　学生会員　○市川　諒
群馬大学　大学院理工学府　正会員　斎藤　隆泰

1. はじめに

波動伝搬解析のための有力な手法として有限要素法 (FEM) や境界要素法 (BEM) が広く利用されている．FEM は非均質材料の扱いが得意であり，BEM は無限領域を含む波動伝搬解析が得意である．したがって，それぞれの解析手法を結合し，互いの利点を生かした数値解析を行うことで効果的な解析が可能になる．著者らは，面外波動問題において，従来法より安定な演算子積分時間領域境界要素法 (CQBEM)[1] と FEM の結合解法の開発 [2] を行ってきた．本研究では，その成果を 2 次元弾性波動問題へと拡張する．FEM で扱う非均質領域に対してはイメージベースモデリングを適用することにより，そのモデル化を容易にする．以下では，定式化について簡単に説明した後，数値解析例を示すことで本手法の有効性について検討する．

2. 解くべき問題とイメージベースモデリング

以下では，2 次元弾性波動問題を対象とし，直交座標系 (x_1, x_2)，時刻 t に対し，変位を $u_i(\boldsymbol{x}, t)$ 等と表記する．右下添え字として現れる小文字のローマ文字は総和規約に従うことに注意されたい．非均質材料であり FEM で解くべき領域を Ω_F，無限遠を含む均質領域であり BEM で解くべき領域を Ω_B とし，領域 Ω_B からの入射波 $u_i^{\rm in}(\boldsymbol{x}, t)$ の透過・散乱問題について考える．各領域 Ω_F，Ω_B にて変位 $u_i(\boldsymbol{x}, t)$ が満足する支配方程式，および結合境界 Γ での境界条件はそれぞれ次のように与えられる．

$$\mu u_{i,jj}(\boldsymbol{x}, t) + (\lambda + \mu) u_{j,ji}(\boldsymbol{x}, t) = \rho \ddot{u}_i(\boldsymbol{x}, t) \quad (1)$$

$$u_{iF}(\boldsymbol{x}, t) = u_{iB}(\boldsymbol{x}, t), \quad q_{iF}(\boldsymbol{x}, t) + q_{iB}(\boldsymbol{x}, t) = 0 \quad (2)$$

右下添え字 F や B はそれぞれ，FEM，BEM 側の物理量を表す．また，ρ は密度，λ，μ はラメ定数，$\dot{(\,)}$ は時間に関する微分，$(\,)_{,i}$ は $\partial/\partial x_i$，$q_i(\boldsymbol{x}, t)$ は表面力を表す．式 (1), (2) を各領域 Ω_F，Ω_B で満たす変位 $u_i(\boldsymbol{x}, t)$ 等を求める．

本研究では，領域 Ω_F の対象として図 1 (a) のようなコンクリートの X-線 CT 画像の bmp (画素数:150×150) を採用し，デジタル画像の 1 画素 (ピクセル) を FEM の 1 要素と整合させる．したがって，解析モデルの作成を図 1 (b) のような画像処理により行うことができる．本研究では，3 値化処理を行い，Ω_F を 3 つの領域に識別した．

3. 有限要素領域に対する定式化

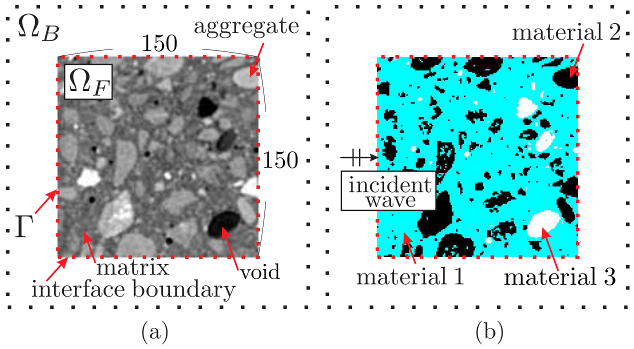

図 1 解析モデル (a) コンクリートの X-線 CT 画像 (150×150) (b) 3 値化処理画像

まず，FEM の定式化を示す．全有限要素数を M_F とし，式 (1) を Galerkin 法で離散化する．本手法では，イメージベースモデリングを用いるため，1 ピクセルを 1 有限要素と整合させる必要がある．そのため，四角形要素で離散化を行う．FEM における区分線形近似を用いた内挿関数 $N_\alpha (\alpha = 1, ..., 4)$ を式 (1) に乗じ，Gauss の発散定理を用いると，式 (1) は次のように表せる．

$$\sum_{e=1}^{M_F}\sum_{\beta=1}^{4}\left[\int_{S^e} \mu N_{\alpha,j} N_{\beta,j} dS u^e_{i\beta} + \int_{S^e} (\lambda+\mu) N_{\alpha,i} N_{\beta,j} dS u^e_{j\beta}\right]$$
$$+ \sum_{e=1}^{M_F}\sum_{\beta=1}^{4}\left[\int_{S^e} \rho N_\alpha N_\beta dS \ddot{u}^e_{i\beta}\right]$$
$$- \sum_{e=1}^{M_F}\sum_{\beta=1}^{4}\left[\int_{\partial S^e} N_\alpha N_\beta d\partial S q^e_{i\beta}\right] = 0 \quad (3)$$

ここで，$u^e_{i\beta}$，$q^e_{i\beta}$ はそれぞれ有限要素 e における β 番目の節点変位，および節点表面力，∂S は有限要素 S の縁を表す．次に，式 (3) に対して，Δt を時間増分，第 n ステップ目の節点変位を $u^{e,n}_{i\beta}$ とし，加速度 $\ddot{u}^{e,n}_{i\beta}$ を後退差分近似すれば，

$$\sum_{e=1}^{M_F}\sum_{\beta=1}^{4}\int_{S^e} [(\Delta t)^2 \mu N_{\alpha,j} N_{\beta,j} + \rho N_\alpha N_\beta] dS \cdot u^{e,n}_{i\beta}$$
$$+ (\Delta t)^2 \sum_{e=1}^{M_F}\sum_{\beta=1}^{4}\int_{S^e} (\lambda+\mu) N_{\alpha,i} N_{\beta,j} dS \cdot u^{e,n}_{j\beta}$$
$$- (\Delta t)^2 \sum_{e=1}^{M_F}\sum_{\beta=1}^{4}\int_{\partial S^e} N_\alpha N_\beta d\partial S \cdot q^{e,n}_{i\beta}$$
$$= \sum_{e=1}^{M_F}\sum_{\beta=1}^{4}\int_{S^e} \rho N_\alpha N_\beta dS (2u^{e,n-1}_{i\beta} - u^{e,n-2}_{i\beta}) \quad (4)$$

となり，イメージベースモデリングを適用した時間領域有限要素方程式を導くことができた．

Key Words: イメージベースモデリング，有限要素法，演算子積分時間領域境界要素法，FEM-BEM 結合解法
〒 376-8515　群馬県桐生市天神町 1-5-1　群馬大学　大学院理工学府　TEL，FAX- 0277-30-1610

4. 境界要素領域に対する定式化

次に，無限領域を含む領域 Ω_B に対し，放射条件の扱いが容易な BEM を適用することを考える．領域 Ω_B に対する時間領域境界積分方程式は次のように書ける．

$$C_{ij}(\boldsymbol{x})u_j(\boldsymbol{x},t) = u_i^{\rm in}(\boldsymbol{x},t) + \int_\Gamma U_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) * q_j(\boldsymbol{y},t)d\Gamma_y - \int_\Gamma T_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) * u_j(\boldsymbol{y},t)d\Gamma_y \quad (5)$$

ここで，$C_{ij}(\boldsymbol{x})$ は自由項[3]，$U_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$，$T_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ はそれぞれ 2 次元弾性波動問題における時間領域基本解および対応する二重層核である．また，$*$ は時間に関する畳込み積分を表す．従来の時間領域 BEM では，式 (5) の計算は，時間増分 Δt が小さい場合に数値解が不安定になる．そこで，式 (5) の畳込み積分の離散化に，Lubich が提案した演算子積分法 (CQM: Convolution Quadrature Method)[4] を適用することで数値解を安定させる．空間の離散化に区分線形近似を用い，境界 Γ を M_B 個の境界要素で離散化すれば，第 n ステップにおいて次の方程式を得る．

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}u_i(\boldsymbol{x},n\Delta t) &+ \sum_{e=1}^{M_B} B_{ij}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^e)u_j^e(n\Delta t) - \sum_{e=1}^{M_B} A_{ij}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^e)q_j^e(n\Delta t)\\ &= u_i^{\rm in}(\boldsymbol{x},n\Delta t) + \sum_{e=1}^{M_B}\sum_{k=1}^{n-1} A_{ij}^{n-k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^e)q_j^e(k\Delta t) - \sum_{e=1}^{M_B}\sum_{k=1}^{n-1} B_{ij}^{n-k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^e)u_j^e(k\Delta t) \quad (6)\end{aligned}$$

ここに，A_{ij}^m，B_{ij}^m は影響関数である．以上より，離散化された時間領域境界積分方程式が示せた．

5. 数値解析例

図 1 (a) を本手法で解析した結果を示す．領域 Ω_F は材料 1，2，3，領域 Ω_B は材料 1 のみで構成されるとした．解析で与える入射波は平面縦波とし，次式で与えた．

$$u_i^{\rm in}(\boldsymbol{x},t) = u_0\delta_{i1}(1-\cos 2\pi\alpha)/2$$
$$\alpha = \begin{cases} \dfrac{c_{L1}}{\lambda_{L1}}\left(t - \dfrac{x_1+a}{c_{L1}}\right) & \text{for} \quad (0 \le \alpha \le 1) \\ 0 & \text{for} \quad \text{otherwise}\end{cases} \quad (7)$$

ただし，δ_{ij} はクロネッカーのデルタ，u_0 は振幅，a は正方領域 Ω_F の代表長さを示す．また $\lambda_{L\gamma}$，$c_{L\gamma}$，$c_{T\gamma}$ 等の物理量は材料 γ における縦波波長，縦波および横波速度等を表している．解析では，入射波の振幅を $u_0 = 1.0$，入射縦波波長を $\lambda_{L1}/a \simeq 0.66$，材料 1，2，3 における縦波と横波の速度比を $c_{L1}/c_{T1} \simeq 1.78$，$c_{L2}/c_{T2} \simeq 1.76$，$c_{L3}/c_{T3} \simeq 1.73$ とし，それぞれの材料 γ におけるポアソン比 ν_γ は，$\nu_1 \simeq 0.27$，$\nu_2 \simeq 0.26$，$\nu_3 \simeq 0.25$ とした．さらに，1 波長に対して十分な要素，節点を配置できるよう有限要素数 $M_F = 22500$，境界要素数 $M_B = 600$ の要素で離散化した．このとき，境界要素は図 1 (b) の赤色点線境界となる．ただし，時間増分 $c_{L1}\Delta t/a \simeq 0.006$，総ステップ数 $n = 1024$ とした．図 2 (a)-(d) は，それぞれステップ数 $n = 100$，200，300，400 における全変位場の絶対値 $|\boldsymbol{u}|$ を示している．図 2 (a)-(b) より，非均質材料中を伝搬した入射波は，材料 2，3 の影響を受け大きく乱されていることが見て取れる．また，均質領域 Ω_B では，非均質領域 Ω_F 内の材料 2，3 による散乱波が伝搬している様子も確認できる．さらに，図 2 (d) では，Ω_F 内の散乱体同士による多重散乱も確認できる．図 2 (a)-(d) を通して，CQBEM を用いているため，散乱波は無限遠方に伝搬している．また，結合境界 Γ において，物理的に不要な波動の発生も確認できない．以上のことから，本手法を用いて複雑な非均質領域および無限遠を含む弾性波動問題を正しく再現できており，本手法の妥当性が示せた．

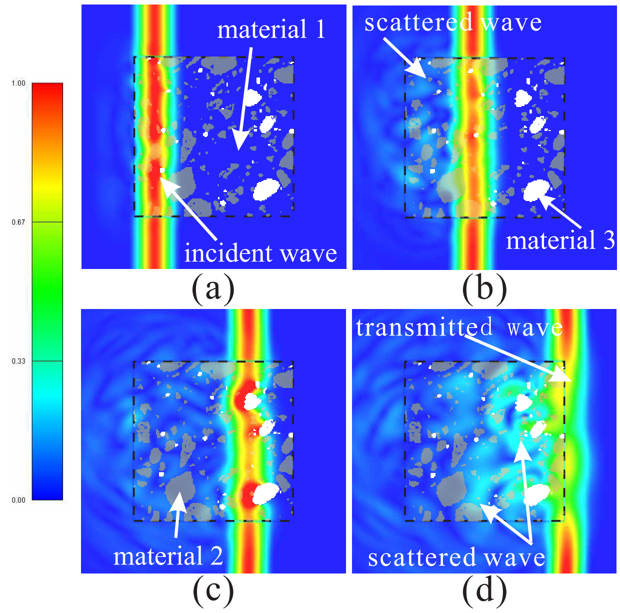

図 2 全変位場のスナップショット (a) $n = 100$ (b) $n = 200$ (c) $n = 300$ (d) $n = 400$

6. まとめ

2 次元弾性波動問題における FEM･BEM 結合解法の定式化を行った．イメージベースモデリングを用いて，実際のコンクリート画像を解析モデルに繰み込んだ解析を行い，結果を考察することで本手法の有効性を示した．今後は，大規模問題に対する高速化手法の適用に取り組む予定である．

参考文献

1) 福井卓雄・斎藤隆泰：Lubich の演算子積分法における高速多重極法，日本シミュレーション学会論文誌，小特集：境界要素法の新展開, vol.28-No.3, pp.17-22, (2009).
2) 斎藤隆泰・市川諒・稲垣祐生：2 次元波動伝搬問題に対する演算子積分時間領域境界要素法・イメージベース有限要素法結合解法，計算数理工学論文集, vol.16, pp.1-6, (2016).
3) 小林昭一編著：波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, (2000).
4) Lubich, C.：Convolution quadrature and discretized operational calculus I and II, *Numer. Math.*, 52, pp.129-145 and pp.413-425, (1988).