

3 次元膜状物体の作成と運動解析

日本大学大学院 学生会員 ○齋藤 良平
 日本大学 フェロー 野村 卓史
 日本大学 正会員 長谷部 寛

1. はじめに

風災害では瓦、木片などの飛翔物による被害やレジャー施設等で使用されている膜状のエア遊具の飛翔により人的被害が生じている。これらの物体形状は複雑で不規則であり、その物体の挙動を解析するためには多様な物体形状の解析モデルが必要である。有限要素法は解析対象の形状作成の任意性においてきわめて優れた手法であるが、メッシュ生成に多くの労力がかかること、また CAD で作成された曲面形状を厳密に表現しきれないことが弱点として挙げられる。そこで CAD で用いられる NURBS (Non-Uniform Rational B-spline) を有限要素の基底関数に用いた IGA (Isogeometric Analysis) という解析手法が提案されている¹⁾。

著者らは IGA の考え方を基本にして CAD ソフトから中実物体の形状データを抽出し運動解析に必要な諸量を算出する過程を構築した^{2,3,4)}。本発表では膜状物体の扱いと運動解析について報告する。

2. NURBS による曲面の表現

曲面の表現に用いる NURBS 基底関数は次式(1)のように、2つのパラメータ ξ, η の関数として定義される。

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{ij}}{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m N_{k,p}(\xi)M_{l,q}(\eta)w_{kl}} \quad (1)$$

ここで w_{ij} は重み、 $N_{i,p}$ 、 $M_{j,q}$ は B-spline 基底関数、 p, q は基底関数の次数、 n, m は基底関数の数 i はノットベクトル $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ の成分の番号、 j はノットベクトル $\mathcal{H} = \{\eta_1, \dots, \eta_j, \dots, \eta_{m+q+1}\}$ の成分番号である。

B-spline 基底関数 $N_{i,p}$ は以下のように逐次的過程により定義される。

次数 $p=0$ のとき

$$N_{i,p}(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

次数 $p>0$ のとき

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1} \quad (3)$$

ノットベクトル Ξ はノット ξ_i の値が同じ、もしくは大きくなるように並べなければならない。NURBS 曲

面は NURBS 基底関数とコントロールポイントの線形結合により式(4)のように表わされる。

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) \mathbf{B}_{ij} \quad (4)$$

$\mathbf{S} = \langle x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta) \rangle^T$ は NURBS 曲面、 $\mathbf{B}_{ij} = \langle x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} \rangle^T$ はコントロールポイントである。

3. 膜状物体の体積、重心、慣性モーメントの算出

膜状物体は厚みをもった NURBS 曲面として扱うものとする。

運動解析に必要な体積 V 、重心 (x_G, y_G, z_G) 、慣性モーメント

$I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$ を算出する。図 1 に示すように曲面上の微小面積 dA の大きさは曲面上の法線ベクトル $\mathbf{n} = \langle n_x, n_y, n_z \rangle^T$ の長さ $|\mathbf{n}|$ に等しい⁵⁾。表面積 S は次の面積分で表される。

$$\begin{aligned} S &= \int_{\eta_0}^{\eta_L} \int_{\xi_0}^{\xi_L} S(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= \int_{\eta_0}^{\eta_L} \int_{\xi_0}^{\xi_L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (5)$$

ここで法線ベクトル n_x, n_y, n_z は次式で表される。

表面積 S に厚み δ を乗じて体積 V を得る。

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} & n_y &= \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ n_z &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (6)$$

1 次モーメントは次の表面積分と厚み δ の積で表される。

$$G_{zx} = \int_{\eta_0}^{\eta_L} \int_{\xi_0}^{\xi_L} y(\xi, \eta) \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} d\xi d\eta \quad (7)$$

重心は 1 次モーメントを体積で割った値となる。

慣性モーメント I_{zz} は次の表面積分と厚み δ の積で表される。

$$I_{zz} = \int_{\eta_0}^{\eta_L} \int_{\xi_0}^{\xi_L} \{x^2(\xi, \eta) + y^2(\xi, \eta)\} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} d\xi d\eta \quad (8)$$

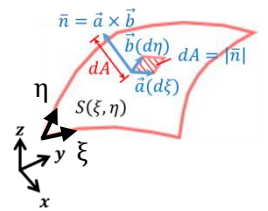


図 1 表面積分のイメージ図

慣性乗積 I_{xy} は次の表面積と厚み δ の積で表される.

$$I_{xy} = \int_{\eta_0}^{\eta_L} \int_{\xi_0}^{\xi_L} x(\xi, \eta) y(\xi, \eta) \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} d\xi d\eta \quad (9)$$

膜状物体の例として,半径 5cm,厚さ 1mm の球殻の体積,重心,慣性モーメントの計算を行った.積分間隔 $\Delta\xi, \Delta\eta$ とともに 1/10 で計算を行い, 計算値と理論値との差が 1%前後という結果が得られた.

図 2 に運動解析モデルとして三角柱的形状を $y-z$ 面内で 60 度曲げた物体を示す.なお,複数の NURBS 曲面で構成される表面の場合,図 3 に示すように表面積分はそれぞれの面ごとに行い,各面ごとの積分結果の合計を求める.結果を表 1 に示す.厚さ $\delta=1.0\text{mm}$,積分間隔 $\Delta\xi, \Delta\eta$ とともに 1/10 で計算を行った.

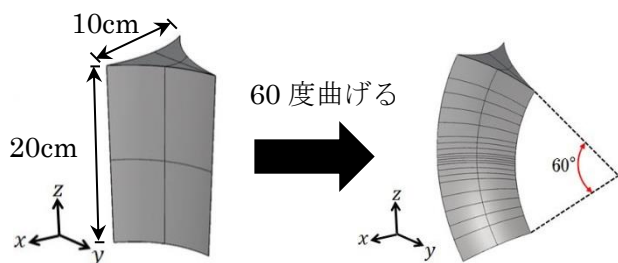


図 2 三角柱的形状を 60 度曲げた形状

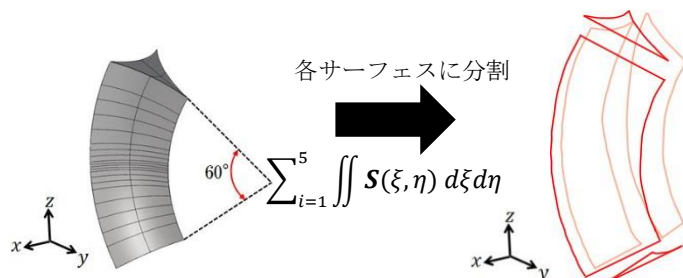


図 3 複数の NURBS 面で表される形状

4. 膜状物体の運動解析

表 1 体積, 重心, 慣性モーメントの計算結果

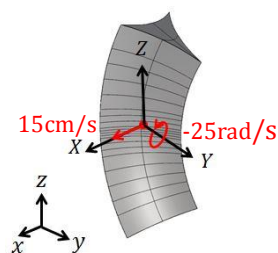
	計算値
V	84.37
$x_G(G_{yz}/V)$	4.94
$y_G(G_{zz}/V)$	3.92
$z_G(G_{xy}/V)$	10.22
I_{xx}	5643.65
I_{yy}	5672.21
I_{zz}	1183.67

これらの諸量を用いて Newmark β 法による運動解析を行った.時間積分間隔 Δt は 0.01sec である.

運動解析モデルと初期速度,初期角速度を図 4 に示す.図 5 に膜状物体重心の xz 面内の軌跡と運動中の姿勢を示す.妥当な結果が得られている.

5. まとめ

CAD ソフトから物体の



質量

$$m = 113.9\text{g}$$

主軸まわりの
慣性モーメント

$$I_x = 1183.6\text{gcm}^2$$

$$I_y = 5643.6\text{gcm}^2$$

$$I_z = 5672.3\text{gcm}^2$$

図 4 膜状物体の運動解析モデル

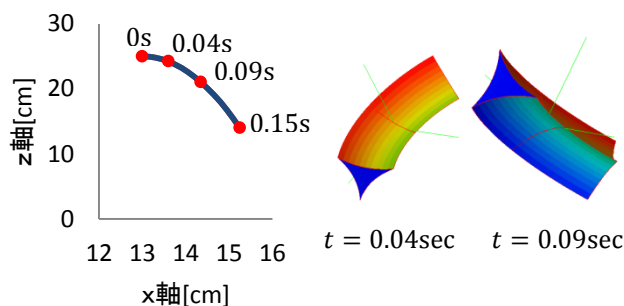


図 5 膜状物体の重心の軌跡と運動中の姿勢

形状データを抽出し,NURBS 面を用いて作成した物体形状に対し厚みを与え,3次元膜状物体の体積,重心,慣性モーメントを算出した.膜状物体の例として複数の NURBS 面で表される 60 度曲げた三角柱的な物体を作成した.

表面積分はそれぞれの面ごとに行い,各面ごとの計算結果の合計を求め,体積,重心,慣性モーメントの計算は妥当な値を得た.また Newmark β 法を用いて膜構造物体の 3 次元物体の運動解析を行い妥当な結果を得た.

今後はエア遊具や瓦など,実際に風災害で問題になっている物体形状を作成し,運動解析を行う予定である.

参考文献

- 1) J. A. Cottrell, T. J.R. Hughes, Y. Bazilevs : Isogeometric Analysis Toward Integration of CAD and FEA, WILEY, 2009.
- 2) 齋藤良平,野村卓史,長谷部寛 : NURBS による物体形状作成と運動解析,平成 27 年度土木学会全国大会第 70 回年次学術講演会,CS8-008,2015.
- 3) 齋藤良平,野村卓史,長谷部寛 : NURBS による物体形状作成の試み,平成 27 年度土木学会第 43 回関東支部技術研究発表会,I-55,2016.
- 4) 齋藤良平,野村卓史,長谷部寛 : NURBS による 3 次元物体形状作成の試み,平成 28 年度土木学会全国大会第 71 回年次学術講演会,CS8-007,2016
- 5) O.C.ツィエンキーヴィッツ, 吉詩雅夫,山田嘉昭: マトリックス有限要素法, 培風館, 1984