

全確率と条件付き確率の比較・分析

中央大学 学生会員 ○神子 尚登

中央大学 正会員 佐藤 尚次

1. はじめに

我が国では、構造物の設計方法として従来の仕様規定型設計法から性能規定型設計法への移行が進んでいる。そして、性能規定型設計法を実現するための方法の1つに信頼性設計法がある。信頼性設計法とは、「構造物はいかに壊れるかに基づいた確率論的手法による設計法」であり、簡潔に言うと「破壊確率を一定以内に抑えること」に基づく設計法である。信頼性設計法では、一般的に R 側 S 側の両方の不確定性を折り込んだ全確率で考えるが、防災の分野等では極めて稀な事象が起きた場合を考える。この場合全確率ではなく条件付確率で考えるのが一般的である。しかし、しばしば全確率と条件付確率は混同されやすく、扱う人の中で理解が異なり議論で認識の齟齬が度々発生してしまうことがある。

そのため、本研究では全確率と条件付確率を信頼性設計法でよく使用されている R-S モデルを用いて分析し、両者の違いを明確にして分かりやすく言語化し、全確率と条件付き確率の相関性を明確化することを目的とする。

2. 破壊確率の算出

破壊確率の算出は超過確率法を使い R-S モデルを用いることとする。

まず R と S だが、R(Resistance)は抵抗側で S(Stress-resultant)は作用側である。R-S モデルを図(1)に示す。縦軸は確率密度を表し、横軸は作用効果・抵抗強度の値を表している。図(1)の上グラフの斜線は荷重などの作用が大きいことを示し、下グラフの斜線は抵抗強度が小さいことを示している。構造物が破壊するというのは S が R より大きくなったとき、つまり地震で例えると想定した地震動に耐えられるように設計した抵抗強度が、実際に起きた地震動より低いときに起こる。

次に計算の過程について説明する。まず破壊確率 P_f を求めるために設計値 S^* , R^* を決める。この時、設計値 R^* を下回る非超過確率を e_R とし、 S^* を上回る超過確率を e_S とする。これは図(1)のグラフで示すところのオレンジ色の部分である。数式化すると式(1)で表される。

$$P_r.[S \geq S^*] = e_S, \quad P_r.[R \leq R^*] = e_R \quad (1)$$

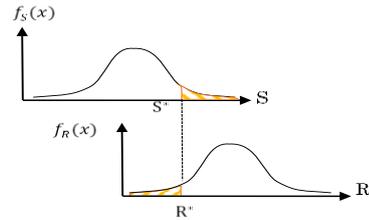
これらの S^* , R^* に対して、設計式は $R^* \geq S^*$ と与えられるとする。 $R^* = S^*$ とおいたときの破壊確率 P_f が式(2)で与えられる。

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (2)$$

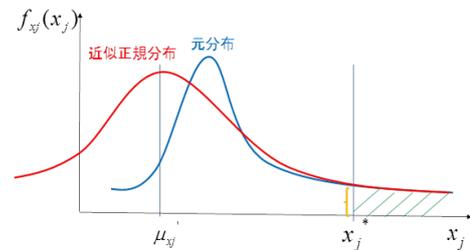
これが全確率である。このとき、 e_R は R が S^* を下回る確率となるのが条件付確率に対応している

そして、式(1)と R 側 S 側それぞれの標準偏差 σ_R と σ_S を用いて信頼性指標 β を表したものが式(3)である。

$$-\beta = \frac{\Phi^{-1}(e_R)\sigma_R + \Phi^{-1}(e_S)\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (3)$$



図(1) 作用側と抵抗側の R-S モデル



図(2) Rackwitz-Fiessler 法の説明図³⁾

なお、 Φ は式(4)で表される標準正規分布関数である。

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (4)$$

この一連の計算により、超過・非超過確率を考慮した破壊確率が算出できる。²⁾

3. 非正規分布の近似方法

超過確率法で用いる 2 章で求めた式(2)は、抵抗側 R 作用側 S 共に正規分布の場合に使える式である。しかし、現実で起こる事象は必ずしも正規分布に従うわけではないため、非正規分布に対応した破壊確率 P_f の算出方法が必要となる。

そこで、本研究では Rackwitz-Fiessler 法(以下 RF 法)を用いて非正規分布を近似正規分布化し超過確率法を使用することとする。RF 法とは図(2)のように元分布の超過確率(緑の領域)ならびに確率密度関数の値(黄色の部分)がそれぞれ等しくなるように近似正規分布で近似する手法である。本研究では RF 法で使用されている式を変形した式(5.a)(5.b)を用いて標準偏差と平均値を算出していく。

$$\mu'_X = x^* - [\Phi^{-1}\{F_X(x^*)\}]\sigma'_X \quad (5.a)^3$$

$$\sigma'_X = \frac{\varphi[\Phi^{-1}\{F_X(x^*)\}]}{f_X(x^*)} \quad (5.b)^3$$

- $\mu'_X(x)$: 近似正規分布の平均値
- $\sigma'_X(x)$: 近似正規分布の標準偏差
- $f_X(x)$: 元分布の確率変数 X の確率密度関数
- $F_X(x)$: 元分布の確率変数 X の確率分布関数
- $\varphi_X(x)$: 標準正規確率密度関数
- x^* : 設計値

また、非正規分布の破壊確率の算出をモンテカルロシミュレーション(以下 MCS)を用いて近似解を推定し、RF法で近似化し超過確率法を用いて算出した破壊確率が正確かどうかを判断する。MCS とは、乱数を用いたシミュレーションを何度も行うことにより近似解を推定する計算手法である。

4. RF法とMCSの比較条件・分析結果

RF法とMCSで比較する確率分布は、対数分布・指数分布・Gumbel分布・Gamma分布とする。計算は、S側R側に標準偏差1・2・5 超過確率0.1%・0.5%・1.0%・5.0%・10.0%・20.0%をそれぞれ変化させ1つの確率分布で合計324通り行った。また今回MCSの試行回数を20万回とし近似解を算出した。計算結果を $\sigma_S = 1,2,5$ についてそれぞれまとめたものを表(1)に示す。

表(1)を見ると、どの場合でも概ねRF法の値はMCSの近似解に近いものであった。しかし、S側が対数正規分布でR側が正規分布の時は、他の組み合わせと比べるとRF法の精度が低い値になった。さらに、R側が正規分布の場合はRF法の値が過小評価する傾向にあることが分かる。

結論として、対数正規分布のRF法との相性は他の確率分布に比べると低いですが、それでも信頼性理論においてこの程度の誤差は許容範囲であるので、今後の指標を用いた分析に正規分布以外の分布でも適用できることが分かった。

5. 指標導出と分析結果

条件付確率と全確率を比較・分析するためには指標が必要である。式(6)(7)(8)(9)は式(2)(3)(4)より導きだした指標である。

$$-\beta_R = \Phi^{-1}(e_R) \quad , \quad -\beta_S = \Phi^{-1}(e_S) \quad (6)$$

$$\alpha_R = \frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad , \quad \alpha_S = \frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (7)$$

$$\gamma_R = \frac{\beta_R}{\sqrt{\beta_R^2 + \beta_S^2}} \quad , \quad \gamma_S = \frac{\beta_S}{\sqrt{\beta_R^2 + \beta_S^2}} \quad (8)$$

$$\cos \theta_{\gamma\alpha} = (\gamma_R, \gamma_S)(\alpha_R, \alpha_S) \quad (9)$$

さらに、式(6)(7)(8)(9)を用いて全確率の信頼性指標 β を表したものは式(10)となる。

$$\beta = \sqrt{\beta_R^2 + \beta_S^2} \cos \theta_{\gamma\alpha} \quad (10)$$

ここで、 $\theta_{\gamma\alpha}$ は単位ベクトル (γ_R, γ_S) と (α_R, α_S) のなす角であり、どちらも第1象限内のベクトルであるので $0 \leq \cos \theta_{\gamma\alpha} \leq 1$ となることがわかる。以上で比較に用いる指標の算出が終了した。

次に、式(14)において $\cos \theta_{\gamma\alpha}$ のある場合とない場合の P_f を比較した。条件をR側S側共に正規分布とし、それぞれの標準偏差と超過確率を変えた合計324通りの組み合わせを計算した。計算結果の一部を表(2)に示す。

計算結果より以下の3つの事がわかった。まず、誤差が1オーダー(10倍)以内の組み合わせが324通り中299通りあった。次に、 θ が大きな値($\cos \theta_{\gamma\alpha}$ が1から遠ざかる)のとき誤差が大きくなっていった。最後に、 $\alpha_S/\alpha_R > 1$ で e_S の値が大きい時と $\alpha_S/\alpha_R < 1$ で e_S の値が小さい時に誤差が大きくなる傾向にある。

以上の事と、設計で考える超過確率 e_S は極めて小さい値ということを踏まえると、標準偏差比が小さく更に超過確率 e_S が大きい値ではないとき式(10)は、式(11)として考えることが可能である。

表(1) RF法とMCSの比較

S(作用側)	R(抵抗側)	比率(RF法/MCS)
対数正規分布	正規分布	0.637
対数正規分布	対数正規分布	0.998
正規分布	対数正規分布	1.228
指数分布	正規分布	0.787
Gumbel分布	正規分布	0.867
Gumbel分布	Gamma分布	1.078

表(2) $\cos \theta_{\gamma\alpha}$ の関係

σ_S	$e_S(\%)$	σ_R	$e_R(\%)$	α_S/α_R	γ_S/γ_R	$\cos \theta$	Pf(%)	
							cosなし	cosあり
1	0.1	1	0.1	1	1	1	0.0028	0.0028
1	0.5	1	0.1	1	0.834	0.9959	0.0122	0.0130
1	1	1	0.1	1	0.753	0.9902	0.0225	0.0260
1	5	1	0.1	1	0.532	0.9564	0.0870	0.1467
1	10	1	0.1	1	0.415	0.924	0.1481	0.3356
1	20	1	0.1	1	0.272	0.8681	0.2363	0.8364
1	0.1	5	20	0.2	3.672	0.4469	0.2363	14.3233
1	0.5	5	20	0.2	3.061	0.491	1.0147	16.4643
2	20	1	0.1	2	0.272	0.6665	0.2363	4.0862
5	20	1	0.5	5	0.327	0.491	1.0147	16.4643

表(3) 式(11)を用いて算出した P_f

年確率	e_S	e_R	β_S	R	$\sqrt{\beta_S^2 + \beta_R^2}$	P_f
30	34%	25%	0.42	-0.66	0.780702	22%
40	50%	25%	0.01	-0.66	0.659161	25%
50	64%	25%	-0.4	-0.66	0.750737	77%
100	97%	25%	-1.8	-0.66	1.945787	97%

$$\beta = \sqrt{\beta_R^2 + \beta_S^2} \quad (11)$$

6. 実用例

式(11)を実例に当てはめて考える。工藤の研究⁴⁾では、高知県を対象とした地震発生時の道路ネットワークの破壊確率を求めている。研究結果の破壊確率は本研究の e_R に該当する。さらに、想定している南海地震を発生頻度と関係づけて考えれば e_S も推定できる。以上より、式(11)を用いて算出した P_f を表(3)に示す。 e_R は南海トラフ地震発生時の四万十中央ICから足摺岬へのネットワーク破壊確率である。

表(3)を見ると年確率30年40年の時 P_f と e_R に大きな差はない。しかし、 $e_S \cdot e_R$ の値が大きいので $\cos \theta_{\gamma\alpha}$ は0に近づき、実際の全破壊確率 P_f は50%に近い値になると推測できる。また、 $\beta_S \cdot \beta_R$ がともに負の値の場合 $\cos \theta_{\gamma\alpha}$ は-1に近づくので P_f は1から引いた値になる。

まとめると、式(10)(11)の $\beta_S \cdot \beta_R$ が異符号であるとき $\cos \theta_{\gamma\alpha}$ は0に近づき、ともに負の値であるとき-1に近い値となる。つまり、式(11)は上記のような $\cos \theta_{\gamma\alpha}$ の影響が大きい場合精度がかなり低くなることがわかった。

7. 終わりに

今回の研究では、式(11)の精度を分析し実例に当てはめて考えた。

今後の研究課題としては、実用例のように $\cos \theta_{\gamma\alpha}$ が求めにくい場合の式(10)(11)の使用方法について詳しく分析していく。

参考文献・出典

- 1) 土木学会構造工学委員会. 設計基準体系における安全性照査ガイドライン研究小委員会報告書, 2014
- 2) 原本 隆一: 超過確率法による性能明示型設計のリスク分担分析, 中央大学修士論文, P12, 2005
- 3) 遠藤 基織: 各種の確率分布に対する信頼性設計による性能明示型設計のリスク分担分析, 中央大学卒業論文 P14, P15, 2009
- 4) 工藤 源太: 高知県を対象とした地震発生時の道路ネットワークの破壊確率, 土木学会関東支部, 2017