Discontinuous Galerkin 有限要素法を用いた浅水長波流れ解析の基礎的研究

中央大学 学生員 ○ 伊藤 翔
中央大学大学院 学生員 花澤 広貴
中央大学 正会員 樫山 和男

1. はじめに

津波，高潮，河川の氾濫などの数値シミュレーションには，浅水長波方程式が広く用いられる．浅水長波方程式は双曲型の方程式であり，不連続な解を有する．したがって，要素の境界で不連続性を許容する DG(Discontinuous Galerkin) 法に基づく有限要素法が，浅水長波方程式の高精度な解法として有効であるといえる．

本研究では，1 次元の非線形浅水長波方程式に対して DG 法に基づく有限要素法を適用し，その有効性の検討を従来の CG(Continuous Galerkin) 法による結果との比較のもとに行う．また，補間多項式の次数の変更による計算精度の差異について検討を行う．

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式

基礎方程式として，以下に示す 1 次元の非線形浅水長波方程式を用いる．

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = S(U) \tag{1}$$

ここで，関数 U は保存変数，$F(U)$ は流束関数，$S(U)$ はソース項であり，それぞれ以下のように定義される．

$$U = [\,H\,,\,q\,]^T \tag{2}$$

$$F(U) = [\,q\,,\,\frac{q^2}{H} + g\frac{H^2}{2}\,]^T \tag{3}$$

$$S(U) = [\,0\,,\,-gH\frac{\partial z}{\partial x}\,]^T \tag{4}$$

ここで，H は全水深，q は流量，g は重力加速度，z は基準面からの底面の高さである．

(2) 空間方向の離散化

式 (1) に対して試験関数 v を掛け, 部分積分を行うと，以下の弱形式が得られる．

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{\partial U}{\partial t} v dx - \int_{x_{j-1}}^{x_j} F\frac{\partial v}{\partial x} dx + Fv\Big|_{x_{j-1}}^{x_j} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} Sv dx \tag{5}$$

この弱形式に対して，数値フラックスと数値積分を適用する．

a) 数値フラックス

要素境界で不連続である要素同士を結び付けるために, 境界項において数値フラックスを適用する．本研究では，次式で定義される Local Lax-Friedrichs Flux[2] を用いる．

$$\hat{F} = \frac{1}{2}[\{F(U^-) + F(U^+)\} - a_{max}(U^+ - U^-)] \tag{6}$$

ここで，a_{max} は次のように定義される a_1〜a_4 の中で最大の値となるものを用いる．

$$a_{max} = max\big(\,a_1 = |v^+ - c^+|,\ a_2 = |v^- - c^-|,\ a_3 = |v^+ + c^+|,\ a_4 = |v^- + c^-|\,\big) \tag{7}$$

ここで，v は流速，c は波速を表し，+，−はそれぞれ要素の左端，右端の値であることを表している．

b) 数値積分

係数行列の計算のために数値積分を適用する．本研究では，補間多項式にルジャンドル多項式を用い、数値積分として，$n+1$ 次のルジャンドル・ガウス公式を用いる．

数値フラックスと数値積分により式を整理すると，以下の有限要素方程式が得られる．

$$M_j \dot{U}_j = \Phi_n'^T W_n F(\Phi_n U_j) + \Phi^+ \hat{F}_{j-1} - \Phi^- \hat{F}_j + \frac{x_j - x_{j-1}}{2}\Phi_n^T W_n S(\Phi_n U_j) \tag{8}$$

ここで，M_j は質量行列，Φ_n は補間多項式の行列，W_n は積分点の重みの行列であり，ルジャンドル多項式の直交性の性質より，M_j は対角行列となり，陽的に解が求まる．

(3) 時間方向の離散化

時間方向の離散化には p+1 段階, p+1 次の Runge-Kutta 法を用いる．ここで，p は補間多項式の次数である．

(4) Moment Limiter[3]

オーバーシュート等を抑えるために，本研究では，以下のように定義される Moment Limiter を用いる．

$$\tilde{U}_j^p = minmod(U_j^p, \beta_p(U_{j+1}^{p-1} - U_j^{p-1}), \beta_p(U_j^{p-1} - U_{j-1}^{p-1})) \tag{9}$$

ここで，U_j^p は要素 j の p 次の補間多項式にかかる係数，β_p は以下のように定義される値である．

$$\beta_p = \frac{\sqrt{p-1/2}}{\sqrt{p+1/2}} \tag{10}$$

また，minmod 関数は，関数の成分の符号がすべて一致しないとき 0 の値を取り，すべて一致するとき以下のような値を取る．

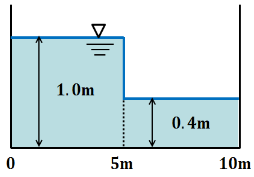
$$minmod(a, b, c) = sgn(a)min(|a|, |b|, |c|) \tag{11}$$

各要素で $\tilde{U}_j^p = U_j^p$ となるまで Limiter 処理を繰り返す．

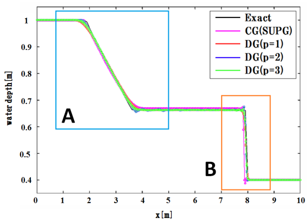
3. 数値解析例

本手法の有効性を検証するため，段波問題を取り上げる．検証内容としては，DG 法と CG 法（SUPG 法に基づく安定化有限要素法）[4] の解析結果の比較，DG 法における補間多項式の次数の変更による解析結果の比較を行う．

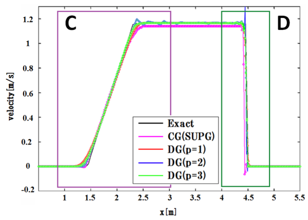
KeyWords： 津波，浅水長波方程式，Discontinuous Galerkin 法，Runge-Kutta 法，Moment Limiter
連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL 03-3817-1808 E-mail s.ito@civil.chuo-u.ac.jp



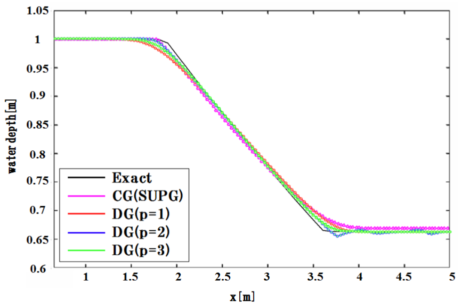
図－１　解析モデル



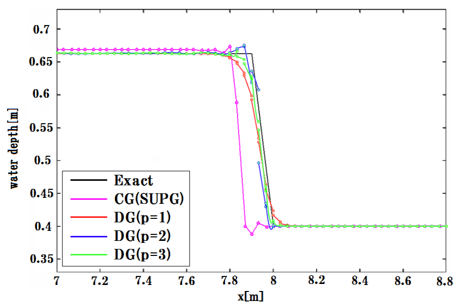
図－２　　水面形状



図－３　　流速分布



図－４　水面形状（A 領域）



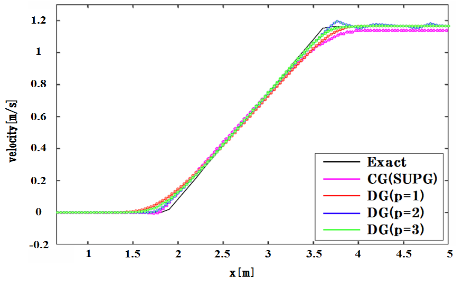
図－５　水面形状（B 領域）

(1)　解析条件

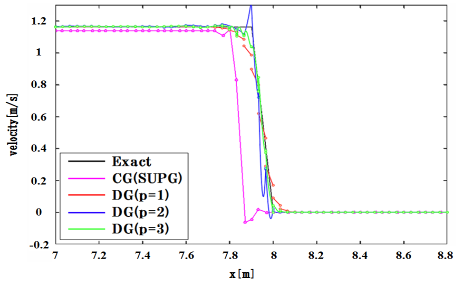
解析モデルを**図－１**に示す．メッシュ分割数は 300，両壁面で slip 条件とし，微小時間増分量は 0.001s とする．

(2)　解析結果

図－２，**図－３**はそれぞれ，1.0s 後の水面形状と流速分布を，補間多項式の次数を変更した DG 法と CG 法とで比較したものである．また，**図－４**から**図－７**は，**図－２**，**図－３**のアルファベットで対応する領域を拡大したものである．図より，勾配がなだらかな部分では，高次の補間ほどなまりが抑えられ，厳密解とよい一致を示していることが確認できる．また，不連続部において，CG 法と比べて DG 法の方が保存性に優れており，厳密解とよい一致を示していることが確認できる．しかし，高次補間になると，不連続部において数値不安定性が現れることも確認できる．



図－６　流速分布（C 領域）



図－７　流速分布（D 領域）

4.　おわりに

本報告では，1 次元の非線形浅水長波方程式に対して DG 法を適用し，段波問題において精度検証を行い，以下の結論を得た．

- DG 法は，CG 法と比べて，解のなまりが抑えられるなど厳密解とよい一致を示していることが確認できた．
- 不連続部近傍では，DG 法は，CG 法と比べて，保存性に優れていることが確認できた．
- 高次の補間ほど，全体的に厳密解とよい一致を示すことが確認できた．しかし，不連続部近傍では，数値不安定性が現れることも確認できた．

今後の課題としては，2 次元解析への拡張，移動境界条件処理の導入，他の Limiter 処理との比較，分散項の導入等が挙げられる．

参考文献

1) Ethan J. Kubatko, Joannes J. Westerink, Clint Dawson : hp Discontinuous Galerkin methods for advection dominated problems in shallow water flow, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.196, No.1-3, pp.437-451, 2006.

2) G. Kesserwani, R. Ghostine, J. Vazquez, A. Ghenaim, R. Mose : Riemann Solvers with Runge-Kutta Discontinuous Galekin Schemes for the 1D Shallow Water Equations, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.134, No.2, pp.243-255, 2008.

3) M.J. Vuik : Limiting and shock detection for discontinuous Galerkin solutions using multiwavelets, *TU Delft MSc Thesis*, 2012.

4) 利根川大介，樫山和男 : 安定化有限要素法による津波遡上および流体力の解析手法の構築，応用力学論文集，Vol.12, pp.127-134, 2009.