## 階段状水路における nonuniform aerated skimming flow の特性

日本大学大学院理工学研究科	学生会員	○竜沢宗一郎
日本大学理工学部	正会員	高橋正行
日本大学理工学部	フェロー会員	大津岩夫

# 1 まえがき

急傾斜地の水路や堰・ダムを流下する高速流を傾斜面 上で減勢させる方法として階段状水路の利用は有効であ る<sup>1),2)</sup>. 階段状水路の skimming flow (各ステップ隅角部 で常に渦の形成される流況<sup>1)</sup>)では,水路に流入した流れ は平坦な傾斜水路よりも短い流下距離で水面から空気が混 入しはじめる.この位置を inception point と呼び,その下 流側では空気混入流となる (図 1).この空気混入流は不等 流区間を経て,各ステップ上の水深と流速が繰り返し同じ 大きさになる擬似等流状態となる (図 1 ①, ②).

階段状水路の水工設計のためには,不等流区間ならびに 擬似等流区間の空気混入流特性(空気混入流水深,流速, エネルギー水頭)を知ることが重要である.

階段状水路の擬似等流状態については, Takahashi and Ohtsu<sup>2)</sup> は水理設計に必要な空気混入流の水深, 流速, およびエネルギー水頭の算定式を示した.

階段状水路の空気混入不等流の水面形については、従来 解析的には求められないと考えられていた<sup>3)</sup>c. そのよう な状況のなかで、高橋・大津<sup>4)</sup> は階段状水路の空気混入不 等流の水面形方程式を提案し、空気混入不等流の水深、流 速、空気混入率、およびエネルギー水頭の流下方向変化に ついて水路傾斜角度 $\theta = 55^{\circ}$ を対象にその適用性の実験的 検討を行った.しかしながら、その他の傾斜角 $\theta$ について はその適用性についての検討がなされていない.さらに、 ゲートを有する階段状水路の空気混入不等流特性について は不明な点が多い.

本研究では,階段状水路の空気混入不等流の水面形方程 式<sup>4)</sup>の妥当性を,自由越流の場合は $\theta$  = 18.4°, 19°, 26.6°, 55°の階段状水路の実験結果<sup>4)-6)</sup>から,ゲート流出の場 合は $\theta$  = 30°と 50°の階段状水路の実験結果<sup>7)</sup>から確か めた.また,空気混入不等流中の空気混入率分布式および 流速分布式を明確に示した.これによって,自由越流およ びゲート流出のどちらにおいても広範囲な水路傾斜角度 $\theta$ とステップ高さに対して空気混入不等流区間の空気混入率 *C*,流速*u*,空気混入流水深,およびエネルギー水頭などの 特性量の算定が可能になった.

### 2 実験

実験は skimming flow の空気混入流 (図 1) を対象に 表 1 の条件のもとで実施された ( $R_e$ :レイノルズ数 ( $R_e = q_w/v_w$ ),  $v_w$ :水の動粘性係数).時間平均空気混入率 C と 流速 u は二点電極型ボイド率計を用いて測定された (測定 時間間隔 20 $\mu$ s,測定時間 20s).また,aerated flow の u, C の評価断面をエッジ断面とした (図 1).なお,y は仮 想底面に垂直な距離である.堤頂から評価断面までの仮 想底面に沿った流下距離 x は鉛直距離  $H_s$ (図 1)を用い,  $x = H_s/\sin\theta$ として算出した.



図 1: 自由越流の場合の skimming flow における流れの領域





表 1: 比較検討に用いた実験条件

$\theta$ (°)	$S/d_c$	$R_e \times 10^{-4}$	備考
18.4°	0.38~0.76	23	自由越流 (Bung <sup>5)</sup> )
19°	0.7~0.9	5~6	自由越流 (Present study)
26.6°	0.28~0.56	35	自由越流 (Bung <sup>5)</sup> )
30°	0.2~0.7	4~34	ゲート流出 (Boes <sup>7)</sup> )
50°	0.4~1.2	6~9	ゲート流出 (Boes <sup>7)</sup> )
55°	0.2~0.7	4~9	自由越流 (Present study)

## 3 空気混入率

階段状水路の空気混入不等流の skimming flow において、レイノルズ数  $R_e \ge 3 \times 10^4$  の場合、空気混入率 C は次の関係で示される <sup>8)</sup>.

ここに,  $y_{0.9}$  は aerated flow depth であり *C*=0.9 となる *y* の値である. (1) 式の関係で*C* の測定値を整理した一 例を図 3 に示す. 図より, 与えられた  $\theta \ge S/d_c$  に対 して  $(x_s - x_i)/d_c$  が大きくなるにつれて仮想底面近く  $(y/y_{0.9} \approx 0)$  に空気が混入している.

断面平均空気混入率 Cm は次式で定義される.

$$C_m = \frac{1}{y_{0.9}} \int_0^{y_{0.9}} C \mathrm{d}y \tag{2}$$

各断面での  $C_m$  の値と Chanson による気泡の拡散モデル (3) 式 <sup>3)b</sup> を用いると空気混入率分布が図 3 の各線のように 示される.

$$C = 1 - \tanh^2 \left( k' - \frac{1}{2D'} Y \right) \tag{3}$$

ここに,  $Y = y/y_{0.9}$ , D'は無次元化された乱流拡散係数であ り $D' = (0.848C_m - 0.00302)/(1 + 1.1375C_m - 2.2925C_m^2)$ ,  $k' = \tanh^{-1}(0.1)^{1/2} + 1/(2D')$ である.

Inception point より下流側の  $C_m$  については, Chanson による気相の連続式 <sup>3)c</sup>[(4) 式] の適用を試みる.

$$\frac{1}{(1-C_{mu})^2} \operatorname{Ln}\left(\frac{1-C_m}{C_{mu}-C_m}\right) - \frac{1}{(1-C_{mu})(1-C_m)} = k_0 \frac{x_s/d_c - x_i/d_c}{d_{wi}/d_c} + K_0$$
(4)

ここに,  $k_0 = u_r d_{wi} \cos \theta q_w$ ,  $K_0 = 1/(1 - C_{mu})[1/(1 - C_m)$ Ln $(1 - C_{mi})/(C_{mu} - C_{mi}) - 1/(1 - C_{mi})]$ ,  $C_{mi}$  は inception point の  $C_m$ ,  $C_{mu}$  は擬似等流区間の  $C_m$ ,  $d_{wi}$  は inception point の clear water depth であり  $d_{wi} = (1 - C_{mi})y_{0.9i}$ ,  $u_r$ は気泡の上昇速度  $(u_r = 0.4 \text{ m/s})$  である.境界条件とし て,  $q_w$ ,  $d_{wi}$ ,  $C_{mi}$ , および  $C_{mu}$  に実験値を与え, (4) 式 を用いて  $C_m$  を算出した結果の一例を図 4 の各線に示す.  $C_m$  の計算値は 15% 以内の差で実験値と一致した.これよ り気相の連続式 (4) 式は,  $\theta = 18.4^\circ \sim 55^\circ$ の自由越流およ びゲート流出のどちらの階段状水路の空気混入不等流にお いても適用できることが確認された.

#### 4 流速分布

階段状水路の空気混入不等流の skimming flow において、レイノルズ数  $R_e \ge 3 \times 10^4$  の場合、空気混入流の流速 u は次の関係で整理されるものと考えられる <sup>8)</sup>.

$$\frac{u}{u_{0.9}} = \operatorname{func}\left(\frac{y}{y_{0.9}}, \frac{H_s}{d_c}, \frac{S}{d_c}, \theta\right)$$
(5)

ここに、 $u_{0.9}$ は空気混入流水深  $y_{0.9}$  での流速である. (5) 式の関係で実験値を整理したものを図 5 に示す. 図に示されるように、与えられた $\theta \ge S/d_c$  に対して、流速分布は(6) 式に示す 1/N乗則で近似され、N の値は  $H_s/d_c$  に関わらず一定である.

$$\frac{u}{u_{0.9}} = \left(\frac{y}{y_{0.9}}\right)^{1/N}$$
(6)



あるいは

$$U = Y^{\frac{1}{N}} \tag{7}$$

ここに,  $U = u/u_{0.9}$ ,  $Y = y/y_{0.9}$ である.

Takahashi and Ohtsu<sup>2)</sup> は擬似等流空気混入流における *N* の値の実験式を次のように提案している.

$$N = 14\theta^{-0.65} \frac{S}{d_c} \left(\frac{100}{\theta} \frac{S}{d_c} - 1\right) - 0.041\theta + 6.27$$
(8)

(8) 式を(6) 式に代入して得られた  $u/u_{0.9}$  を図 5 の実線で 示す. 図に示されるように,実線は実験値をおおむね満足し ている. これより,自由越流およびゲート流出のどちらの場 合でも, N の値は  $H_s/d_c$  に関わらず,与えられた $\theta \ge S/d_c$ によって(8) 式から求められる.

#### 5 空気混入不等流の水面形

空気混入不等流の clear water depth  $d_w$ [=  $(1 - C_m)y_{0.9}$ ] の水面形方程式は,高橋・大津<sup>6)</sup> によって次のように導かれている.

$$\frac{\mathrm{d}d_w}{\mathrm{d}x} = \sin\theta \frac{d_w^3 - d_{wu}^3}{C_p d_w^3 \cos\theta - C_v d_c^3} \tag{9}$$

(9) 式中の補正係数  $C_p$  と  $C_v$  はそれぞれ次のように示される.

$$C_p = \frac{\int_0^1 \left[ (1-C)Y + \int_Y^1 (1-C)dY \right] UdY}{\left( 1 - \int_0^1 CdY \right) \int_0^1 (1-C)UdY}$$
(10)

$$C_{\nu} = \frac{\left(1 - \int_0^1 C dY\right)^2 \int_0^1 (1 - C) U^3 dY}{\left[\int_0^1 (1 - C) U dY\right]^3}$$
(11)

(10) 式と(11) 式より C の分布 [C(Y)] と U の分布 [U(Y)] が得られると、C<sub>v</sub> と C<sub>p</sub> の値を求めることができる.すな わち、流速分布を 1/N 乗則(7) 式、空気混入率分布を気泡 の拡散モデル(3) 式で近似すると、C<sub>v</sub> および C<sub>p</sub> の値を求 めることができる.

流れは射流であるため、境界条件は inception point を 計算原点 ( $x = x_i$ ) とし,そこでの clear water depth  $d_{wi}$  を 与え、下流側へ向かって (9) 式を数値積分すると不等流区 間の dw が求まる.ここでは、不等流区間の Cm を気相の 連続式 [(4) 式] から求め, 空気混入率分布を気泡の拡散モ デル(3)式, 流速分布を1/N 乗則[(7)式,(8)式] で近似し,  $C_p$ を(10)式,  $C_v$ を(11)式から求め, (9)式によって  $d_w$ を 計算した (図 6). dw/dc の計算値は 15% 以内の差で実験 値と一致した. また,本計算による clear water depth  $d_w$ と  $C_m$  の値および  $y_{0.9} = d_w / (1 - C_m)$  を用いると空気混入 流水深 y<sub>0.9</sub> が得られる (図 6). y<sub>0.9</sub>/d<sub>c</sub> の計算値は 15% 以 内の差で実験値と一致した.ゲート流出の場合,図6(b)に 示されるように、ゲート開口高によって、dw/dcの水面形 が S2(図 6(b) 破線) になるときと S3(図 6(b) 実線) になると きがある.一方, aerated flow depth  $y_{0.9}/d_c$  は空気混入の 影響で  $(x_s - x_i)/d_c$  の増加に伴い増加している [図 6(b)].

以上より,自由越流およびゲート流出のどちらの場合で も,(9)式によって,18.4°  $\leq \theta \leq 55$ °の広範囲な水路傾 斜角度の空気混入不等流の水面形を求められることが示さ れた.



(b) ゲート流出の場合

図 6: clear water depth  $d_w$ と空気混入流水深  $y_{0.9}$ 

6 空気混入流のエネルギー水頭

仮想底面を基準面とする空気混入流のエネルギー水頭 *E*、は次式で示される<sup>1),6)</sup>.

$$E_s = C_p d_w \cos\theta + C_v \frac{V_w^2}{2g} \tag{12}$$

空気混入率 *C* と流速 *u* の測定値を用い *d<sub>w</sub>* および *V<sub>w</sub>*(= *q<sub>w</sub>/d<sub>w</sub>*)を,(10),(11) 式から*C<sub>p</sub>* および*C<sub>v</sub>* を求め, (12) 式を用いて空気混入流のエネルギー水頭 *E<sub>s</sub>/d<sub>c</sub>* を算 出した結果を図7に示す.図に示されるように計算値は実 験値と15% 以内で一致した.また,与えられた  $\theta \ge S/d_c$ に対して,不等流区間においては (*x<sub>s</sub>* - *x<sub>i</sub>*)/*d<sub>c</sub>* の増加に伴 い *E<sub>s</sub>/d<sub>c</sub>* が大きくなり,擬似等流区間において *E<sub>s</sub>/d<sub>c</sub>* は 一定となる.また,水路傾斜角度  $\theta$  を変化させた計算によ ると,与えられた *S/d<sub>c</sub>*  $\geq$  (*x<sub>s</sub>* - *x<sub>i</sub>*)/*d<sub>c</sub>* に対して  $\theta$  の増加 にともない *E<sub>s</sub>/d<sub>c</sub>* の値は増加している.図7に示される ように,自由越流およびゲート流出のどちらの場合でも, 本研究の手法によって, *E<sub>s</sub>/d<sub>c</sub>* の値の予測が可能であるこ とが確かめられた.

#### 7 まとめ

水路傾斜角度  $\theta$  = 18.4° ~ 55°の aerated skimming flow の不等流区間を対象に水深,流速,空気混入率,および エネルギー水頭について検討した結果を以下に示す.

- 断面平均空気混入率 C<sub>m</sub> は,自由越流およびゲート 流出のどちらの場合でも,気相の連続式 (4) 式で求 められる.
- 不等流区間,擬似等流区間ともに流速分布は 1/N 乗 則 [(6) 式] で近似でき,自由越流およびゲート流出 のどちらの場合でも,Nの値は H<sub>s</sub>/d<sub>c</sub> に関わらず, (8) 式で求められる.
- 空気混入不等流の水面形方程式 (9) 式による  $d_w$ と  $y_{0.9}$  の計算値は,実験値と 15% 以内の差で一致 した. すなわち,高橋・大津の提案した水面形方程 式<sup>6)</sup>の適用範囲を 18.4°  $\leq \theta \leq 55$ °に拡張できた. また,自由越流およびゲート流出のどちらの場合で も, (9) 式は適用できることが明らかになった.
- 本研究によって広範囲な水路傾斜角度 θ, ステップ 高 S, 流量 q<sub>w</sub> に対して階段状水路の空気混入不等流 の C<sub>m</sub>, d<sub>w</sub>, y<sub>0.9</sub>, E<sub>s</sub> を予測することが可能になっ た. すなわち,自由越流およびゲート流出のどちら の場合でも,階段状水路の水工設計に必要な水深, 流速,空気混入率,およびエネルギー水頭を定量的 に求められるようになった.

謝辞:著者の一人(高橋正行)は本研究の一部に日本大学理 工学部応用科学研究助成金の助成を受けた.ここに記して 謝意を表します.



図 7: 空気混入流のエネルギー水頭

#### 参考文献

- 1) Ohtsu, I., Yasuda, Y., Takahashi, M.: "Flow characteristics of skimming flows in stepped channels.", *J. Hydraul. Engrg.*, Vol.130, No.9, pp.860–869, 2004.
- Takahashi, M., Ohtsu, I.: "Aerated flow characteristics of skimming flow over stepped chutes.", *J. Hydraul. Res.*, Vol.50, No.4, pp.427–434, 2012.
- Chanson, H.: *The hydraulics of stepped chutes and spillways*, AA.Balkema, Lisse, The Netherlands, a) p.148, b) p.154, c) pp.172–175, 2002.
- 4) 高橋正行,大津岩夫: "階段状水路における不等流区間の 空気混入流特性",土木学会論文集 *B1* (水工学), Vol.67, No.4, pp.1123–1128, 2011.
- Bung, D. B.: "Developing flow in skimming flow region on embankment stepped spillways", *J. Hydraul. Res.*, Vol.49, No.5, pp.639–648, 2011.
- 6) 高橋正行,大津岩夫: "階段状水路の skimming flow にお ける空気混入不等流解析", 土木学会論文集 *B1* (水工学), Vol.69, No.4, pp.913–918, 2013.
- 7) Boes, R.M.: *Two-phase flow and energy dissipation on stepped chutes*, PhD Thesis, ETH, Zürich, Switzerland (in German).
- 8) 高橋正行,安田陽一,大津岩夫: "階段状水路における空 気混入射流の特性に対するレイノルズ数の影響",水工 学論文集,土木学会, Vol.50, pp.871-876, 2006.