

非線形性能関数における安全性指標の効率的な計算法に関する研究

東京都市大学 ○学生会員 横井 剛

東京都市大学 正会員 丸山 収

1. はじめに

現在、構造物の性能を評価する手法は許容応力度設計法から限界状態設計法へと移り変わっている。限界状態設計法は信頼性理論の取り入れ方によりレベル3からレベル1に段階分けされる。本研究では性能関数の平均値と標準偏差から安全性指標を求める手法であるレベル2において性能関数が非線形関係式で与えられた場合を想定している。非線形関係式を線形化し、安全性指標を導く過程でプログラミング言語を用いることで計算を大幅に簡略化し、効率的に検討する。

2. 安全性指標の算出

構造物が安全な状態であるのか、破壊する状態であるのかを性能関数 $g(x)$ として記述し、安全性指標を算出することを考える。性能関数は確率変数ベクトル x の関数であり以下のように定義する。

$$g(x) > 0 \text{ 安全}, \quad g(x) \leq 0 \text{ 破壊} \quad (1)$$

確率変数ベクトル $x^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ が正規分布に従い、互いに相関を有するものとする。このとき破壊点は x_0^T と表すことができ、 $x_0^T = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_n^T]$ の近傍で性能関数を1次項までのテーラー展開により線形化し、 $g(x_0) = 0$ であることを考慮すると次式を得られる。

$$g(x) \approx (x - x_0)^T G_0 \quad (2)$$

$$\text{ここで } G_0^T = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x_0} = \left[\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \right]_{x_0} \quad (3)$$

式(2)より、性能関数 $g(x)$ の平均値と分散値は以下に求まる。

$$E[g(x)] = \bar{g}(x) = (\bar{x} - x_0)^T G_0 \quad (4)$$

$$E[(g(x) - \bar{g}(x))^2] = \sigma_g^2 = G_0^T C_x G_0 \quad (5)$$

式(4)と式(5)から、安全性指標 β は次式で求められる。

$$\beta = \frac{\bar{g}(x)}{\sigma_g} = \frac{(\bar{x} - x_0)^T G_0}{(G_0^T C_x G_0)^{\frac{1}{2}}} \quad (6)$$

上記式(6)のうち、共分散行列である C_x は平均値ベクトルを $\bar{x}$ とし、次式で与えられる。

$$C_x = E[(x - \bar{x})(x - \bar{x})^T] \quad (7)$$

図-1は性能関数が非線形式で与えられた場合に線形化を施すことで安全性指標を求める手法を模式的に表している。原点と線形化直線との最短距離が安全性指標 β である。

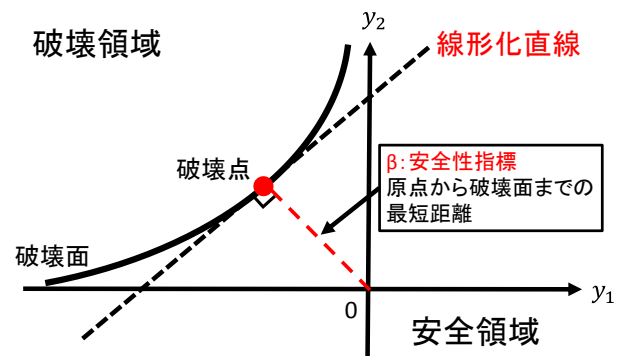


図-1 非線形関係式での安全性指標の算出

3. 破壊点の直接探索

式(6)は破壊点におけるヤコビアン行列 G_0 が未知であるため、破壊点の探索を行いながら収束計算を行う必要がある。収束計算には拡張カルマンフィルタを用いるが、そのためには状態方程式と観測方程式の定式化が必要となる。各種アルゴリズムの中で本研究ではラグランジュの未定乗数法を用いた手法²⁾を参考にし、定式化を行った上で拡張カルマンフィルタを用いたプログラミング言語によって効率的に収束計算を行う。まず、定式化するにあたり制約条件付最小化問題を考える。

$$\gamma(x) = [(x - \bar{x})^T C_x^{-1} (x - \bar{x})]^{\frac{1}{2}} \rightarrow \text{最小} \quad (8)$$

制約条件 $g(x) = 0$

式(8)に対し、 λ をラグランジュの未定乗数とし、ラグランジュの未定乗数法を用いる。

$$L(x, \lambda) = [(x - \bar{x})^T C_x^{-1} (x - \bar{x})]^{\frac{1}{2}} + \lambda g(x) \rightarrow \text{最小} \quad (9)$$

式(9)の極小点では $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ となることを用いて、式(7)の最小値を与える x を破壊点 x_0 とする。

キーワード 安全性指標, 拡張カルマンフィルタ, ラグランジュの未定乗数法

連絡先 〒158-8557 東京都世田谷玉堤 1-28-1 TEL 03-5707-0104 (代表) 内線 3269

$$\gamma(x_0) = \frac{(\bar{x} - x_0)^T G_0}{(G_0^T C_x G_0)^{\frac{1}{2}}} \quad (10)$$

式(10)は式(6)で与えられる安全性指標 β と一致する。

これを利用し、式(7)から定式化するための2次形式評価関数の制約条件付最小化問題を考える。

$$\gamma'(x) = \frac{1}{2} \gamma(x)^2 = \frac{1}{2} (x - \bar{x})^T C_x^{-1} (x - \bar{x}) \rightarrow \text{最小} \quad (11)$$

制約条件 $g(x) = 0$

式(10)は確率変数ベクトル x に関する2次形式で与えられ、評価関数 $\gamma'(x)$ は x に関して2回微分可能である。式(10)に対し、再びラグランジュの未定乗数法を用いる。

$$L'(x, \lambda') = \frac{1}{2} (x - \bar{x})^T C_x^{-1} (x - \bar{x}) + \lambda' g(x) \quad (12)$$

式(12)を x と λ' で偏微分する。

$$\frac{\partial L'}{\partial x} = C_x^{-1} (x - \bar{x}) + \lambda' \frac{\partial g(x)}{\partial x} \quad (13)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \lambda'} = g(x) \quad (14)$$

式(12)の極小点では $\partial L' / \partial x = 0$, $\partial L' / \partial \lambda' = 0$ となることを用いて、式(11)の最小値を与える x を破壊点 x_0 とする。

$$\gamma'(x'_0) = \frac{1}{2} \left[\frac{(\bar{x} - x'_0)^T G'_0}{(G'_0{}^T C_x G'_0)^{\frac{1}{2}}} \right]^2 \quad (15)$$

式(11)より、安全性指標が正の値ならば、式(7)と破壊点は一致するので、 $x_0 = x'_0$, $G_0 = G'_0$ として、安全性指標は次式に表される。

$$\beta = \sqrt{2\gamma'(x_0)} \quad (16)$$

以上より拡張カルマンフィルタに破壊点を求めるための定式化を行う。定式化された状態方程式、観測方程式はそれぞれ式(17)、式(18)となる。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \lambda \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \lambda \end{bmatrix}_i \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x^{-1} (x - \bar{x}) + \lambda' \frac{\partial g(x)}{\partial x} \\ g(x) \end{bmatrix} \quad (18)$$

式(17)における添え字 i は、解が収れんするまでバッチ処理で拡張カルマンフィルタアルゴリズムの繰り返し計算を行うことを意味している。この定式化により破壊点 x_0 と破壊点におけるヤコビアン行列 G_0 が定まり、式(15)、式(16)から安全性指標 β を求めることができる。

4. 数値計算例

以下に最も基本的な性能関数を示す。この式を元に安全性指標の試算を行った。

$$g_1(x) = x_1 - x_2 \quad (19), \quad g_2(x) = \frac{x_1}{x_2} - 1 \quad (20)$$

$$g_3(x) = 1 - \frac{x_2}{x_1} \quad (21), \quad g_4(x) = \frac{x_1}{x_2^2} - \frac{1}{x_2^2} \quad (22)$$

このとき、 $x_1 \sim N(10, 2)$, $x_2 \sim N(8, 2)$ のガウス確率変数とし、相関係数は $\rho = 0.0, 0.3, 0.6$ の3ケースを仮定した。収れん計算は50回とし、試算結果を表-1に示す。

表-1 安全性指標の試算結果

性能関数	相関係数 ρ	安全性指標 β
線形 $g_1(x)$	0.0	0.70711
	0.3	0.84515
	0.6	1.11803
非線形 $g_2(x)$	0.0	0.70711
	0.3	0.84515
	0.6	1.11803
非線形 $g_3(x)$	0.0	0.70711
	0.3	0.84515
	0.6	1.11803
非線形 $g_4(x)$	0.0	0.70711
	0.3	0.84515
	0.6	1.11803

収れん計算を行った結果、各式で相関係数ごとに安全性指標が収束していることが分かる。このとき式(19)は線形関係式であるので理論解である。式(22)のような非線形関係式でも収れん計算を重ねることで精度の良い値が得られた。このことから効率的に計算を行えたことが分かる。

5. 今後の方針

今後の方針として、基本的なラーメン構造における性能関数を用いて、安全性指標の算出をプログラミングにて効率的に算出する手法を検討する

参考文献

- 1) 丸山 収: 拡張カルマンフィルタを用いた安全性指標算定に関する基礎研究, 土木学会年次学術講演会講演概要集, 62巻, 1号, 1-0201頁, 2007
- 2) shinozuka, M.: Basic Analysis of Structural Safety, ASCE, Vol.109, No.ST3, pp.721-740, 1983.