スライディング境界条件を用いた非適合メッシュによる移流拡散解析

日本大学　学生会員　○長井耀太郎
日本大学　　正会員　　長谷部　寛
日本大学　フェロー　　野村　卓史

1. はじめに

有限要素法は解析する領域を隙間なく有限要素で分割し，要素ごとに作成された離散化方程式を重ね合わせて全体の方程式を構築する解析法である．そのため，通常は節点が隣り合う要素の辺上に位置することのない適合メッシュを用いて解析が行われる. Y. Bazilevs らはヘリコプターのプロペラが回転する解析のために，非適合な境界を有するメッシュでも解析を成立させることのできる特殊な境界条件, スライディング境界条件を考案した[1)2)]. 非適合なメッシュを用いることが可能となれば複雑な形状のメッシュを作成することが容易となる．さらには様々な移動境界問題にも応用が可能である．そこで本研究では移流拡散解析を対象にスライディング境界条件を活用し非適合なメッシュでの解析を実現するとともに境界条件の特性について検討した.

2. スライディング境界条件

スライディング境界条件とは，図 1 のように，非適合な境界上で解析を成立させるための境界条件である．非適合となった境界上にだけ新たな境界条件を付与すればよいので，複雑なメッシュでの解析や，運動物体の解析も容易となる.

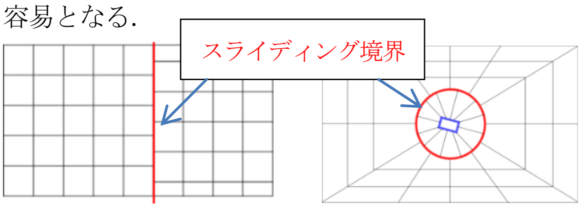


図 1　スライディング境界を用いた非適合メッシュの例

3. 移流拡散問題へのスライディング境界条件の適用

本研究では未知変数がスカラー量である移流拡散問題を対象にスライディング境界条件の特性を検討した．使用した移流拡散方程式は以下の式（1）である.

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+u_j\frac{\partial\phi}{\partial x_j}-k\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j^2}=0 \tag{1}$$

ϕ は濃度，t は時間，u_jは流速，k は拡散係数である．スライディング境界を用いない適合メッシュで解析する場合は SUPG 法[3)] に基づいて支配方程式を離散化する．離散化した式は式（2）になる.

$$\int_\Omega q_h\left(\frac{\partial\phi_h}{\partial t}+u_j\frac{\partial\phi_h}{\partial x_j}\right)d\Omega+\int_\Omega\frac{\partial q_h}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial\phi_h}{\partial x_j}\right)d\Omega$$
$$+\sum_{e=1}^{N_{el}}\tau_s\int_{\Omega_e}u_i\frac{\partial q_h}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\phi_h}{\partial t}+u_j\frac{\partial\phi_h}{\partial x_j}-k\frac{\partial^2\phi_h}{\partial x_j^2}\right)d\Omega \tag{2}$$
$$=\int_\Gamma q_h\left(k\frac{\partial\phi_h}{\partial x_j}\right)n_j\,d\Gamma$$

ここでq_h, ϕ_hは重み関数, n_jは境界上の外向き法線ベクトル，Ω は解析領域，Γ は解析領域の境界を表すτ_sは SUPG 法の安定化パラメータ[3)] である.

スライディング境界条件を用いて非適合メッシュでの解析を実現させるためには式（2）の左辺に新たに以下の 3 つの項を加える.

$$-\sum_{eb=1}^{N_{eb}}\int_{\Gamma_{eb}}(q_h^L-q_h^R)\frac{1}{2}\left(k^L\frac{\partial\phi_h^L}{\partial x_j}n_j^L-k^R\frac{\partial\phi_h^R}{\partial x_j}n_j^R\right)d\Gamma$$
$$-\sum_{eb=1}^{N_{eb}}\int_{\Gamma_{eb}}\frac{1}{2}\left(k^L\frac{\partial q_h^L}{\partial x_j}n_j^L-k^R\frac{\partial q_h^R}{\partial x_j}n_j^R\right)\left(\phi_h^L-\phi_h^R\right)d\Gamma$$
$$+\sum_{eb=1}^{N_{eb}}\int_{\Gamma_{eb}}\left(\left(q_h^L-q_h^R\right)\tau_{eb}\left(\phi_h^L-\phi_h^R\right)\right)d\Gamma$$

$$\tau_{eb}=\frac{C\cdot k}{h} \tag{4}$$

Γ_{eb}はスライディング境界を表す. 第 1 項がフラックスの連続性を保つための項，第 2 項が解の安定性を保つための項，第 3 項が未知変数（濃度）の連続性を保つための項である．添え字の L , R は図 1 で示したメッシュの境界より左側を左側境界，右側を右側境界として表している．τ_{eb}は安定化パラメータである．h は要素代表長，C は 4.0 が推奨されている.

4. 非適合部の境界面の扱い

本研究ではまず始めに第 3 項の未知変数（濃度）の連続性を保つための項のみを考慮して解析を行った. 左右の節点値が混合した項の処理をするために右側境界と左側境界の間に新たに図 2 に示す細分化境界を作成する．細分化境界上の要素の形状関数は，左側及び右側境

キーワード　スライディング境界条件，細分化境界，非適合メッシュ
連絡先　〒101-8308　東京都千代田区神田駿河台 1-8-14　tel.03-3259-0411

界上の要素と同じ関数を用いる．節点値$\overline{\phi_1}$，$\overline{\phi_2}$は，投影された節点である．投影された節点値は右側境界の節点値ϕ_1，ϕ_2および辺長h^Rまた投影された節点までの辺長h_1'から得られる．同様の考えで細分化境界上の重み関数の節点値を求めた．

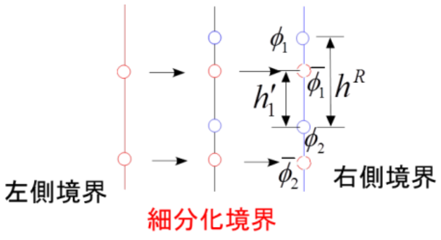


図２　細分化境界の扱い

5. 移流拡散問題の解析条件と解析結果

図３に示す通常の適合メッシュと，図４に示す解析領域の中央で非適合となるメッシュを用いて，スライディング境界条件の効果を確認する解析を行った．節点値は484，要素数は200，時間積分間隔Δtは0.001s，ペクレ数P_eは0.1，拡散係数kは0.005である．適合メッシュと非適合メッシュで比較し，非適合メッシュでは非適合部にスライディング境界条件を適用した．

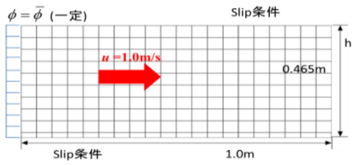


図３　適合メッシュの解析条件

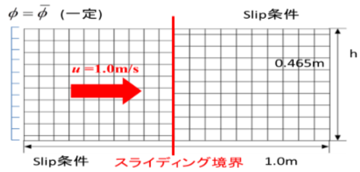
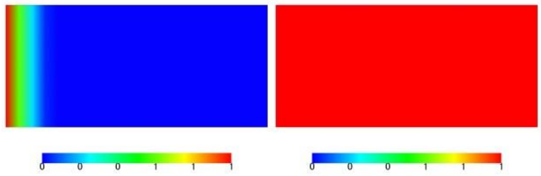


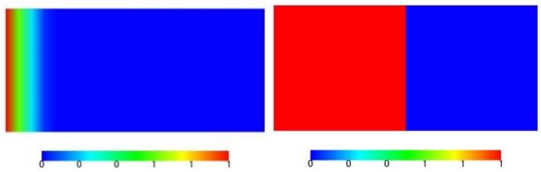
図４　非適合メッシュの解析条件

図５は適合メッシュを用いた結果であり，左から右に濃度が移流していく．図６，図７は非適合メッシュの結果である．スライディング境界を適用しない場合(図６)は，非適合部を濃度は通過しないが，適用した場合(図７)は，非適合部を濃度が通過することが確認できた．非適合部の上下で若干濃度が低下しているが，メッシュサイズの違いが影響していると考えられる．図８には適合メッシュと非適合メッシュで，解析領域鉛直方向中央部の流入境界から流出境界までの濃度の節点値の差を示した．非適合部を通過する際(0.04ｓ)に最大で流入濃度の約10%の誤差が発生するが，時間の経過とともに誤差が小さくなっていることがわかる．



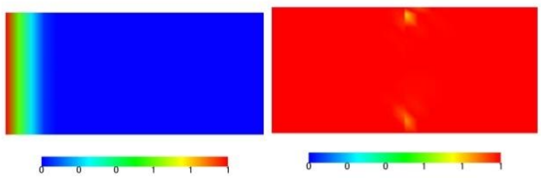
[0 秒]　　　　[0.94 秒]

図５　適合メッシュでの濃度の移流結果



[0 秒]　　　　[0.94 秒]

図６　スライディング境界条件を適用しない場合



[0 秒]　　　　[0.94 秒]

図７　スライディング境界条件を適用した場合

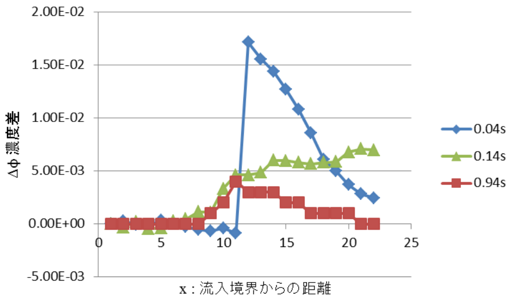


図８　時間ごとの濃度差の変化

6. まとめ

解析メッシュの非適合部にスライディング境界条件を適用し移流拡散解析を行った．スライディング境界条件を適用することで非適合の境界上を濃度が通過した．今後はフラックスの連続性を保つ項や解の安定性を保つ項を追加し影響を検討する．

参考文献

[1]Y.Bazilevs et al.: NURBS-based isogeometric analysis for the computation of flows about rotating components, Comput Mech(2008) vol43:pp143-150 ,2008

[2]Y.Bazilevs et al. : Computational Fluid-Structure Interaction, WILEY , 2013

[3]日本計算工学会流れの有限要素法研究委員会：続・有限要素法による流れのシミュレーション，2012