NURBS による物体形状作成の試み

日本大学	学生会員	○齋藤	良平
日本大学	フェロー	野村	卓史
日本大学	正会員	長谷音	阝 寛

1. はじめに

有限要素法は構造解析や流体解析など幅広い工学分 野で用いられているが,問題点としてメッシュ生成に 多くの時間と労力がかかること,また CAD で作成され た曲面形状を厳密に表現しきれないことが挙げられる. そこで CAD で用いられる NURBS (Non-Uniform Rational B-spline)を有限要素の基底関数に用いた IGA (Isogeometric Analysis)という解析手法が提案されている.

本研究では CAD ソフトから物体の形状データを抽 出し, NURBS を用いて物体形状を作成し,物体の運動解 析を実施することを目的とする.

2. NURBS による曲線の表現

NURBS 基底関数は次式(1)で定義される.

$$R_{i}^{p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_{i}}{\sum_{k=1}^{n} N_{k,p}(\xi)w_{k}}$$
(1)

ここで R_i^p は NURBS 基底関数, w_i は重み, $N_{i,p}$ は各成 分の B-spline 基底関数, pは基底関数の次数, nは基底 関数の数, iはノットベクトルE = { $\xi_1, \xi_2, \cdot, \xi_i, \cdot, \xi_{n+p+1}$ } の成分の番号である.

B-spline 基底関数*N_{i,p}*は以下のように逐次的過程により定義される.

次数p=0のとき

$$N_{i,p}(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$
(2)

次数p>0 のとき

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} + \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1} \quad (3)$$

ノットベクトル Ξ はノット ξ_i の値が同じ,もしくは 大きくなるように並べなければならない.

一方 NURBS 曲線は NURBS 基底関数とコントロ ールポイントの線形結合により表現できる.

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=0}^{n} R_i^p(\xi) \boldsymbol{B}_i \tag{4}$$

ここで**C** = $\langle x(\xi), y(\xi) \rangle^{T}$ は NURBS 曲線, $B_i = \langle x_i, y_i \rangle^{T}$ は コントロールポイントである. B-spline と NURBS を用 いて描いた曲線の例を図 1 に示す. B-spline 曲線は重み がすべて 1 である. NURBS 曲線は重みが 1 より小さい 場合,コントロールポイントから離れていく特性がある.



図1 B-spline 曲線と NURBS 曲線

3. 面積, 図心, 慣性モーメントの算出



図2 ハート型の形状(a)と導関数のホドグラフ(b)

NURBS 曲線を用いて、半円を3つ組み合わせ、45 度傾 いたハート型の物体形状を作成した(図2(a)).この 曲線の導関数をホドグラフで示したものが図2(b)であ る.図2(a)のハート型の図形はA→B→C→D→E→F→A

キーワード Isogeometric Analysis, NURBS, B-spline, 運動解析, ガウスの発散定理 連絡先〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台1丁目 8-14 日本大学大学院理工学研究科土木工学専攻 TEL03-3259-0411 という順番で描かれている. 図 2 (b) のホドグラフは A→ B→B'→C→D→D'→E→F→F'→G という順番で描かれて いる.

面積 A, 図心(*x_G*, *y_G*), 慣性モーメント*I_G*はガウスの発散 定理により算出する.2次元形状の場合, ガウスの発散 定理は式(7)のように表される.

. .

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} \left(F_x \frac{dy}{ds} - F_y \frac{dx}{ds} \right) ds$$
(7)
ここでΩは物体が占める領域, Γは物体の境界,
 $(n_x, n_y)^{\Gamma}$ は境界Γ上の外向き単位法線ベクトルである.
面積の場合,被積分関数を以下のように与える.

$$F_{x} = \frac{1}{2}x, F_{y} = \frac{1}{2}y \left(\frac{\partial F_{x}}{\partial x} + \frac{\partial F_{y}}{\partial y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\right)$$
(8)
その結果面積は次式のような線積分の式で表される.

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\xi_L} \left(x(\xi) \frac{dy}{d\xi} - y(\xi) \frac{dx}{d\xi} \right) d\xi$$
(9)

次に慣性モーメントを算出する.*x*,*y*,*z*を物体の図心 を原点とする座標系とすると,*z*軸周りの断面二次極モ ーメント*I*_zは次のように表される.

$$I_{\bar{z}} = \iint_{\Omega} \left(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 \right) d\bar{x} d\bar{y} \tag{10}$$

Izは次式のような線積分の式で表される.

$$I_{\bar{z}} = \frac{1}{3} \int_0^{\xi_L} \left(\bar{x}^3 \frac{dy}{d\xi} - \bar{y}^3 \frac{dx}{d\xi} \right) d\xi \tag{11}$$

図 2 のハート型に式(9),(11)に台形則を適用し,数値 積分した結果を表 1 に示す.

表1 45度傾いたハート型の諸量の計算結果

	積分間隔	計算値	理論値	誤差
A	$\Delta \xi = 1/100$	58.85	58.90	0.085%
$\begin{pmatrix} x_G \\ (G_y/A) \end{pmatrix}$	$\Delta \xi = 1/100$	4.998	5	0.04%
$\begin{array}{c} y_G \\ (G_x/A) \end{array}$	$\Delta \xi = 1/100$	3.939	3.939	0%
I _G	$\Delta \xi = 1/100$	608.6	608.9	-0.05%

4. 運動解析



Newmark β 法を用いて,図2のハート型をした単位厚 さの板状物体の運動解析を行った.なお物体の密度は $\rho = 2.41 kg/m^3$ とした.図3は運動解析結果を軌跡がわ かるように図示したものである.

5. CAD ソフトからの形状データの抽出

CAD ソフト Rhinoceros で図 2(a)の物体形状を作成し, 物体の形状データを抽出することを行った. 図 2 の形状 を作成したところ式(12)のノットベクトルを抽出でき た.

$\Xi = \begin{cases} 0,0,0,3.93,3.93,7.85,7.85,11.8,11.8,15.7,15.7,\\ 23.6,23.6,31.4,31.4,31.4,31.4 \end{cases}$ (12)

なお,式(12)の下線のノット値はこちらでおぎなった.

式(12)のノットベ クトルは,式(6)と 異なり不等間隔で ある.そのためホド グラフは図 2(b)と は異なり,図 4 のよ うになった.また 式(12)のノットの 間隔は曲線の実長 になっている.



による導関のホドグラフ

6. まとめ

CAD で用いられる NURBS を用いて 2 次元物体形状 を作成し,運動解析を行った.物体形状の例として 45 度 傾いたハート型を作成した.面積,図心,慣性モーメン トの計算はガウスの発散定理を用いて計算し,理論値 との誤差が少ない値を得ることができた.これにより 非対称形状でもガウスの発散定理を適用できることが わかった.また CAD ソフトから抽出したノットベクトル は曲線の実際の長さに基づいていることがわかった. 今後は 3 次元の物体を作成し,その運動解析を行う予定 である.

参考文献

- J. A. Cottrell, T. J.R. Hughes, Y. Bazilevs: Isogeometric Analysis Toward Integration of CAD and FEA, WILEY, 2009.
- 2) 齋藤良平,野村卓史,長谷部寛: NURBS による物体形状作 成と運動解析,平成27年度土木学会全国大会第70回年次 学術講演会,CS8-008,2015.

2.5

2 11