

VMS 有限要素法を用いた閉空間の自然対流の解析

日本大学理工学部土木工学科 学生会員 ○鈴木宏哉
 日本大学理工学部土木工学科 正会員 長谷部寛
 日本大学理工学部土木工学科 フェロー会員 野村卓史

1. はじめに

林野火災や市街地において発生が危惧される火災旋風などの火災は広範囲に大きな被害をもたらす可能性がある。数値シミュレーションはそのような広域の火災の被害軽減の方策の検討に有効であると考えられる。

本研究では、様々な火災で生じる気流の微細な乱流変動を捉えられるような、乱流モデルを導入した火災時の気流の数値解析法を構築することを目指した。具体的にはこれまでに本研究室で構築された林野火災解析法¹⁾に、乱流モデルとして VMS 法 (Variational Multiscale 法)²⁾を組み込み、閉空間の自然対流の解析を行った。

2. 解析手法

2.1 低マッハ数近似した気流の支配方程式

本研究では高温時の密度変化を考慮するため低マッハ数近似³⁾による気流の支配方程式を用いた。支配方程式は以下の連続条件式、運動方程式、エネルギー方程式、状態方程式からなる。

$$\text{連続条件式: } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \quad (1)$$

$$\text{運動方程式: } \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (2)$$

エネルギー方程式:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho C_p T) + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho C_p T) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + S_r \quad (3)$$

$$\text{状態方程式: } p = \rho T \quad (4)$$

ここで u_i は流速, ρ は空気の密度, p は圧力, T は温度, σ_{ij} は応力テンソル, f は外力, C_p は比熱, k は熱伝導率, S_r は外部からの熱量である。

2.2 VMS 有限要素法による離散化

火災時の気流の乱流変動を捉えるため、乱流モデルとして VMS 法²⁾を用いる。VMS 法は未知関数と重み関数の両方を粗いスケールの成分と微細なスケールの成分に分離して方程式の離散化を行う。微細スケールの未知変数は残差を含んだ形でモデル化される。本研究では以下のように扱った。

$$\begin{aligned} \tilde{U}_i &= U_i + u'_i & u'_i &= \tau_M R_{Mi} \\ \tilde{P} &= P + p' & p' &= \tau_c R_c \\ \tilde{T} &= T + t' & t' &= \tau_E R_E \end{aligned} \quad (5)$$

ここでは $\tilde{U}_i, \tilde{P}, \tilde{T}$ は厳密解, U_i, P, T は粗いスケール成分, u'_i, p', t' は微細なスケール成分, τ_M, τ_c, τ_E はそれぞれの式の安定化パラメーター, R_{Mi} は運動方程式の残差, R_c は連続条件式の残差, R_E はエネルギー方程式の残差である

連続条件式および運動方程式に VMS 法を適用すると次式(6)となる。有限要素は六面体 1 次要素を用いることとする。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_i^h \left\{ \rho^h \left(\frac{\partial U_i^h}{\partial t} + U_j^h \frac{\partial U_i^h}{\partial x_j} + U_i^h \frac{\partial U_j^h}{\partial x_j} \right) - f_i \right\} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \frac{\partial w_i^h}{\partial x_j} \sigma_{ij}^h d\Omega + \int_{\Omega} q^h \left(\frac{\partial \rho^h}{\partial t} + \frac{\partial \rho^h U_i^h}{\partial x_i} \right) d\Omega \\ & + \sum_e \int_{\Omega^e} (U_j^h \frac{\partial w_i^h}{\partial x_j} + q^h) \tau_M R_{Mi} d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} \frac{\partial q_i^h}{\partial x_i} \tau_c R_c d\Omega \\ & + \sum_e \int_{\Omega^e} U_j \frac{\partial w_i^h}{\partial x_j} \tau_M R_{Mi} d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} \frac{\partial w_i^h}{\partial x_j} (\tau_M R_{Mj}) (\tau_M R_{Mi}) d\Omega \\ & = \int_{\Gamma} w_i^h \sigma_{ij}^h n_j d\Gamma \end{aligned} \quad (6)$$

ここで, w_i^h は運動方程式の重み関数, q^h は連続条件式の重み関数, Ω は解析領域, Γ は解析領域の境界, Ω^e は 1 つの要素を表す。

キーワード: VMS 法, 有限要素法, 自然対流

連絡先: 〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8-14 TEL: 03-2059-0605

式(6)の左辺 6 項目, 7 項目はクロス応力項とレイノルズ応力項と称され, これらは SUPG/PSPG 法で離散化した際にはあらわれない. 上記の式と同様に VMS 法を適用してエネルギー方程式を離散化すると次式(7)となる.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v^h \left(\frac{\partial \rho^h C_p T^h}{\partial t} + U_j \frac{\partial \rho^h C_p T^h}{\partial x_j} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \frac{\partial v^h}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T^h}{\partial x_j} \right) d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} U_j \frac{\partial v^h}{\partial x_j} (\tau_E R_E) d\Omega \\ & = \int_{\Gamma} v^h \left(k \frac{\partial T^h}{\partial x_j} \right) n_j d\Gamma \end{aligned} \quad (7)$$

v^h はエネルギー方程式に対する重み関数である. なお, 式(7)は通常の SUPG 法で離散化した有限要素方程式と等しい.

3. 解析条件と解析結果

VMS 法を適用した解析の検証のため, 閉空間の自然対流の解析を行った. 解析領域, メッシュおよび境界条件を図-1 に示す. 解析領域は高さ 0.05m, 幅 0.05m とし, 奥行き 1 要素の疑似 2 次元解析とした. 節点数 3362, 要素数 1600 として中央が粗く外側に向けて細くなるようなメッシュを用いた. 流れの境界条件は全て滑りなし条件とし, 温度の境界条件は上下境界をトラクションフリー条件とし, 左右の側面を基準温度 T_0 から温度差 $\Delta T_w (=T_H - T_C)$ にするように設定した.

レイリー数を $R_q = 10^6$ とし, 温度差パラメータ $\beta \Delta T_w = 0.2, 0.5 (\beta = 1/T_0, T_0 = 300K)$ の 2 パターンの解析を行った. 図-2 は温度差が小さい場合の解析結果である. どちらのケースも熱対流の発生が確認された. 図-3 は解析領域の中央の鉛直軸に沿う断面の流速の水平方向成分を表したグラフである. 温度差パラメータの違いはあまり見られなかった. Mlaouah らの研究⁴⁾と比較すると, 若干の差が見られたので, 解析メッシュの影響などを検討する必要があると考えている.

4. おわりに

本研究は火災により生じる高温の気流の微細な乱流変動を捉えるため, 低マッハ数近似された方程式

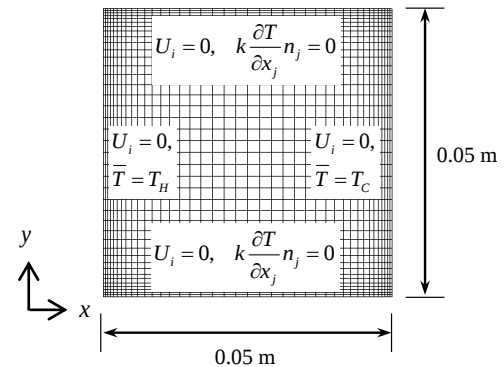
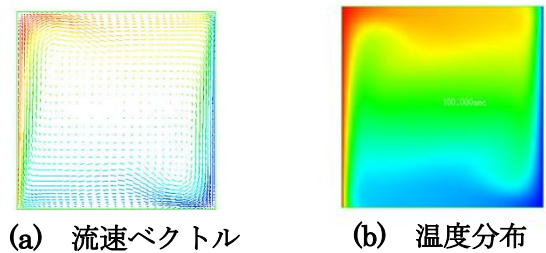


図-1 解析条件と解析メッシュ図



(a) 流速ベクトル

(b) 温度分布

図-2 $\beta \Delta T_w = 0.2$ の解析

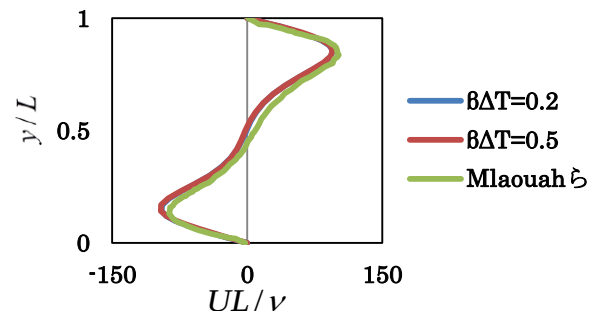


図-3 鉛直断面における水平方向速度分布

を VMS 有限要素法に基づき離散化し, 閉空間の自然対流の解析を行った. その結果, $R_q = 10^6$ の解析結果は妥当なものであり, VMS 法が層流にも適用できることがわかった.

乱流状態になる高レイリー数の解析を行い, 乱流変動が捉えられるか検証を行う予定である.

参考文献

- 1) 長谷部寛, 他 2 名: 計算工学会講演会論文集, vol.20, A-1-3, 2015
- 2) 日本計算工学会流れの有限要素委員会: 続・有限要素法による流れのシミュレーション, シュプリンガー・ジャパン, 2008
- 3) 胡長洪, 福地信義: 日本造船学会論文集, vol. 186, pp.663-671, 2001
- 4) Helmi MLAOUAH, 他 2 名: 日本機械学会論文集 62 巻 594 号, pp.346-352, 1996