3次元飽和多孔質弾性体中の波動問題に対する並列化された演算子積分時間領域境界要素法

○群馬大学大学院　正会員　斎藤隆泰
群馬大学大学院　学生会員　金井翔平

1. はじめに

本研究では, 飽和多孔質弾性体中の 3 次元波動伝搬問題に対する演算子積分時間領域境界要素法について述べ, さらにその大規模問題への適用について検討する. 飽和多孔質弾性体の力学モデルは, Biot[1)] により提案された. Biot の飽和多孔質弾性体モデルでは, 波動伝搬の特性として, 波速の異なる複数の波動が生じ, それらが周波数に依存した分散・散逸性を持つことが知られている. そのため, 時間領域で閉じた基本解が求まらず, 従来の時間領域境界要素法を用いた定式化が困難であった. このような中, 近年, 著者らは演算子積分時間領域境界要素法を適用して, 2 次元飽和多孔質弾性体中の波動問題を解析してきた [2)].

そこで, 本研究では, 2 次元問題の成果を 3 次元問題へと拡張する. 以下では, まず, Biot 物体中の支配方程式等について説明した後, 演算子積分時間領域境界要素法の定式化について解説する. 最後に, 数値解析例を示し, 本手法の有用性について確認する.

2. Biot 物体中の波動問題

以下では, $(\,)_{,i}$ は x_i 方向に関する空間微分, $(\dot{\,})$ は時間微分を示すものとする. また, 同一項で繰返される添字は総和規約に従うものとする. なお, 添字が小文字の場合は $1,2,3$ を, 大文字の場合は $1,2,3,4$ の値をとることとする. Biot の飽和多孔質弾性体モデルは図 1 に示すような固体骨格と間隙流体から構成される. 飽和多孔質弾性体における固体骨格部の変位を u_i, 間隙流体の変位を U_i, 間隙率 β のときの相対変位を $w_i = \beta(U_i - u_i)$, 全応力を σ_{ij}, 流体圧力を p とすると, 固体および流体に対する運動方程式は次のように表される.

$$\text{固体：}\ \sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i + \rho_f \ddot{w}_i \tag{1}$$

$$\text{流体：}\ p_{,i} + \rho_f c_i = -\rho_f \ddot{u}_i - \frac{\rho_f}{\beta}\ddot{w}_i - b\dot{w}_i \tag{2}$$

ここに, ρ, ρ_f はそれぞれ固体骨格と間隙を飽和する流体の混合物および間隙流体の密度であり, b は浸透率 k と粘性係数 η を用いて $b = \eta/k$ で表される散逸パラメータである. また, b_i および c_i はそれぞれ, 固体, 流体の質量に働く物体力である. なお, 飽和多孔質弾性体中の適合方程式および構成方程式は, 固体骨格部の Lamé 定数 λ, μ, Biot の弾性係数 M, Biot の有効応力定数 α, 固体骨格部のひずみ e_{ij}, 単位体積の固体骨格部に出入りする流体量 ζ を用いて次のように表される.

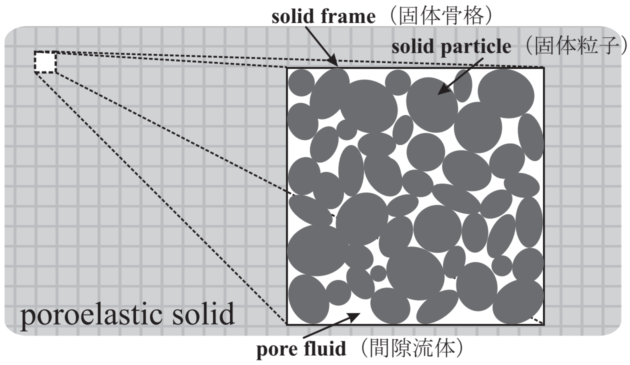

図 1 Biot の飽和多孔質弾性体モデル.

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),\ \ e = e_{kk} = u_{k,k} \tag{3}$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + (\lambda e - \alpha p)\delta_{ij},\ \ p = -\alpha M e + M\zeta \tag{4}$$

3. 演算子積分時間領域境界要素法

(1) 時間領域境界積分方程式

さて, 無限領域 D 内に閉じた境界 S を有する散乱体による外部散乱問題を考える. 式 (1), (2) より, 次の時間領域境界積分方程式を導くことができる.

$$C_{IJ}(\boldsymbol{x})q_J(\boldsymbol{x}) = q_I^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},t) + \int_S U_{IJ}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) * v_J(\boldsymbol{y},t)dS_y - \fint_S W_{IJ}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) * q_J(\boldsymbol{y},t)dS_y \tag{5}$$

ただし, $\boldsymbol{q}$ は, 固体変位の u_i および流体圧力 p から成る一般化変位 $\boldsymbol{q} = \{u_1, u_2, u_3, p\}$ であり, $\boldsymbol{q}^{\mathrm{in}}$ はその一般化変位に対応する入射波, $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{q}$ に対応する一般化表面力である. また, $*$ は時間に関する畳込み積分, $C_{IJ}(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ における境界形状に依存する自由項である. 積分記号 $\fint$ は積分をコーシーの主値の意味で評価することを表している. なお, 一般化表面力 $\boldsymbol{v}$ は, 全応力に対する表面力 $t_i = \sigma_{ij}n_j$ および単位表面あたりに固体表面を通過する流体の体積 $p_n = w_i n_i$ から構成される. 一方, U_{IJ} および W_{IJ} は Biot の飽和多孔質弾性体中の波動問題における時間領域基本解および対応する二重層核である. 通常の時間領域境界要素法では, 式 (5) を時・空間に関して適切な近似基底を導入し, 直接離散化する必要がある. しかしながら, 先に述べたように飽和多孔質弾性波動問題における時間領域基本解 U_{IJ} を閉じた形で求めることは困難であること, 波速の異なる波動が複数

Key Words: 境界要素法, 波動解析, Biot 物体
〒 376-8515　群馬県桐生市天神町 1-5-1

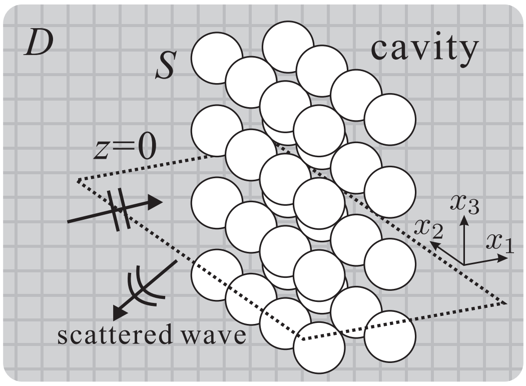

図 2 大規模波動解析モデル.

存在するため数値解の安定性に問題があること等が要因となり, 式 (5) を通常の時間領域境界要素法の手順で離散化および解析することは難しい. そこで, 本研究では式 (5) に含まれる畳込み積分を演算子積分法を用いて離散化する.

(2) 演算子積分法 (CQM) の適用

式 (5) を空間に関して M 個の一定要素で離散化し, 時間増分を Δt として CQM を用いると, 第 n ステップにおける離散化された境界積分方程式は次式で表される.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}q_I(\boldsymbol{x}, n\Delta t) &= q_I^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x}, n\Delta t)\\ &+ \sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{k=1}^{n}\left[A_{IJ}^{n-k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^{\alpha})v_J(\boldsymbol{y}^{\alpha}, k\Delta t)\right.\\ &\left. -B_{IJ}^{n-k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^{\alpha})q_J(\boldsymbol{y}^{\alpha}, k\Delta t)\right] \qquad (6)\end{aligned}$$

ここで, 下付添え字の α は要素番号を, A_{IJ}^m および B_{IJ}^m は 3 次元飽和多孔質弾性体中の波動問題における基本解および二重層核に対応する影響関数である. ただし, 本概要では紙面の都合上これらの詳細については割愛する.

4. ハイブリッド並列化

式 (6) を通常の演算子積分時間領域境界要素法のスキームで解く場合, 必要記憶容量が膨大になることは明らかである. そこで, 本研究では, 2 次元問題の場合と同様 [2], 影響関数から成る境界要素係数行列や入射波ベクトルを行割し, 各領域に 1 ノードを割り当てた MPI 並列化を施す. 詳細は, 文献 [2] を参照されたい.

5. 数値解析例

数値解析例を示す. 図 2 に示すような半径 $a = 1$ の空洞が 3 次元無限領域中に 32 個等間隔 a で配置されているモデルに対して, 入射平面 L_1 波に対する散乱問題を解析する. なお, 入射平面 L_1 波は前論文 [2] における 2 次元問題で用いたものを 3 次元問題へ拡張した. 解析に用いるパラメータは表 1 の値を用いた. また, 空洞は 1 つ当たり 512 個の一定要素で離散化した. したがって, 全境界要素数数 $M = 512 \times 32 = 16384$ となり, 総時間ステップ数 N は $N = 64$ とした. このとき, 全境界未知量は 4194304($16384 \times 4 \times 64$; 要素数 × 1 要素当たりの自由度 × 総時間ステップ数) となる. 時間増分は $\Delta t = 0.06$ とした. なお, 計算には, 京都大学のスーパーコンピューターシステム CRAY XE6 を用い, 64 ノードを利用した MPI 並列化を施した. 各ノードは 32 コアを有しており, OpenMP を用いたハイブリッド並列を実行した. 計算結果の一部を図 3 に示す. 図 3(a),(b) および (c),(d) は, それぞれ空洞周辺の固体変位 u_1, および流体圧力 p の $z = 0$ 平面での散乱波動場のスナップショットを示している. ただし, 図 3(a),(c) は $t = 1.2$, 図 3(b),(d) は $t = 3.84$ での解析結果である. 図 3 より, 入射平面 L_1 波は散乱されて, 固体変位 u_1, 流体圧力 p いずれに対しても散乱波が発生していることを確認できる. なお, 境界全未知量を求めるために必要とした全計算時間は, わずか 5 分であった.

表–1 解析に用いたパラメータ.

$\mu/(\lambda+2\mu)$	$\lambda/(\lambda+2\mu)$	$M/(\lambda+2\mu)$	β	ρ/ρ_f
1/3	1/3	5/6	0.2	2.6

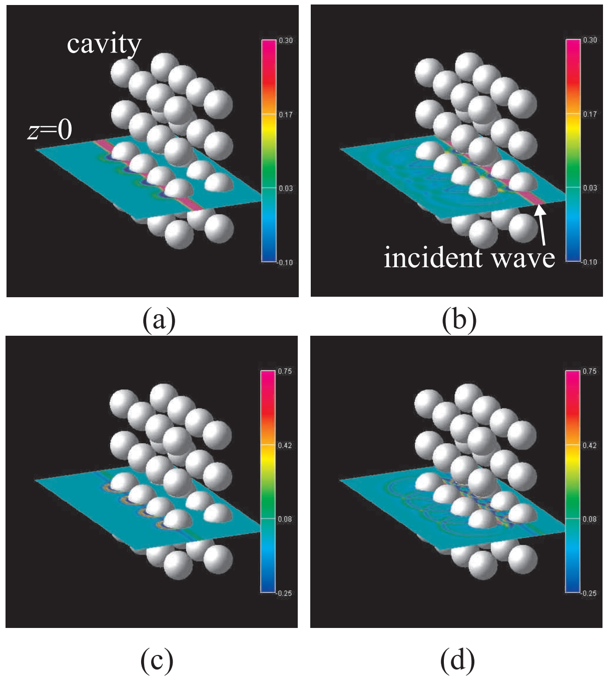

図 3 入射平面 L_1 波による平面 $z = 0$ での空洞周辺の散乱波動場.(a),(b) 固体変位の散乱波 u_1(c),(d) 流体圧力の散乱波 p.

6. おわりに

2 次元飽和多孔質弾性波動問題に対する演算子積分時間領域境界要素法を 3 次元問題へと拡張した. MPI および OpenMP を利用したハイブリッド並列化を施すことで, 大規模波動解析を実現した. 今後は, さらなる高速化・効率化を実現するために, 高速多重極法や ACA の適用を検討する.

参考文献

1) M. A. Biot: Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol.28, pp.168-178, 1956.
2) T. Saitoh, F. Chikazawa and S. Hirose: Convolution quadrature time-domain boundary element method for 2-D fluid-saturated porous media, *Appl. math. model.*,vol.38, pp.3724-3740, 2014.