イメージベース有限要素法を用いた 非均質材料に対する3次元波動伝搬解析

1. はじめに

有限要素法による数値解析を行う場合,解析モデルの作成に多くの時間が費やされる.特に,非均質材料のモデリングは困難を有する.したがって,本研究では,解析モデルのデジタル画像を有限要素モデルに変換するイメージベースモデリング¹⁾を有限要素法に適用し,3Dモデル作成工程の機械化と省略化を目指す.作成したモデルに対する数値解析のとして,コンクリート内における3次元波動伝搬解析を行うことで非均質材料に対する本手法の有効性を示す.

2. 支配方程式

有限要素法による 3 次元等方弾性体中の波動伝搬問題を 考える. 直交座標系 (x_1, x_2, x_3) に対し, 時刻 t における位 置 x での変位を $u_{\alpha}(x, t)$ とし, 物体力を無視すれば Navier-Cauchy の運動方程式²⁾ は

$$\rho \ddot{u}_{\alpha} = \mu u_{\alpha,\beta\beta} + (\lambda + \mu) u_{\beta,\alpha\beta} \tag{1}$$

と表せる. ここで, μ , λ は Lamé 定数, ρ は弾性体の密度, (') は時間微分を表す. 本解析では $u_{\alpha}(\mathbf{x}, t = 0)$ の初期条件が 全領域でゼロである変位場を仮定し, 式 (1) に適切な境界条 件を設定することで変位 $u_{\alpha}(\mathbf{x}, t)$ を求める。

3. 3次元弾性波動問題に対する有限要素法

有限要素法の定式化には Galerkin 法³⁾を適用する. 立方 体一次要素の形状関数 $N_i(i = 1, ..., 8)$ を重み関数として式 (1) に乗じ, 要素 e の領域 v_e で積分した結果を要素毎に重 ね合わせることで次式を得る.

$$\sum_{e=1}^{m} \int_{v^e} N_i (\mu u_{\alpha,\beta\beta} + (\lambda + \mu) u_{\beta,\alpha\beta} - \rho \ddot{u}_\alpha) dv = 0$$
 (2)

ここで, *m* は全有限要素数である. 一方, Gauss-Green の定 理より, 次の関係が成り立つ.

$$\int_{v_e} N_i u_{\alpha,\beta\beta} dv_e = \int_{S_e} N_i u_{\alpha,\beta} n_\beta dS_e - \int_{v_e} N_{i,\beta} u_{\alpha,\beta} dv_e$$
$$\int_{v_e} N_i u_{\beta,\alpha\beta} dv_e = \int_{S_e} N_i u_{\beta,\alpha} n_\beta dS_e - \int_{v_e} N_{i,\beta} u_{\beta,\alpha} dv_e$$
(3)

ここで, *S_e* は要素 *e* の境界であり, *n_β* は境界上の単位法線 ベクトルの成分である.式 (2) に式 (3) を代入し, 整理する

群馬大学工学部	学生会員	○稲垣祐生
群馬大学大学院理工学府	正会員	斎藤隆泰
福井大学大学院工学研究科	正会員	鈴木啓悟



図1 3D 有限要素モデル作成.

と次の式を得る.

$$\sum_{e=1}^{m} \sum_{j=1}^{8} \left[\int_{v^e} \mu N_{i,\beta} N_{j,\beta} dv u^e_{\alpha j} + \int_{v^e} \lambda N_{i,\alpha} N_{j,\beta} dv u^e_{\beta j} \right] \\ + \int_{v^e} \mu N_{i,\beta} N_{j,\alpha} dv u^e_{\beta j} \left] + \sum_{e=1}^{m} \sum_{j=1}^{8} \left[\int_{v^e} \rho N_i N_j dv \ddot{u}^e_{\alpha j} \right] \\ - \sum_{e=1}^{m} \sum_{j=1}^{8} \left[\int_{S^e} N_i N_j ds t^e_{\alpha j} \right] = 0$$
(4)

ここで, $u_{\alpha j}^{e}$, $t_{\alpha j}^{e}$ はそれぞれ, 要素 e の各節点における x_{α} 方向の変位, 節点力を表す. 式 (4) を行列表示すると

$$[K]\{u_{\alpha}\} + [M]\{\ddot{u}_{\alpha}\} - \{T_{\alpha}\} = 0$$
(5)

となる. ここで, [K] は全体剛性マトリクス, $\{u_{\alpha}\}$ は節点変 位ベクトル, [M] は全体質量マトリクス, $\{T_{\alpha}\}$ は表面力ベ クトルを表す. 次に, 式 (5) 左辺第二項における $\{\ddot{u}_{\alpha}\}$ を中 心差分で近似する. [M] に集中化を施し, 対角行列と仮定す ると, 第 n ステップ目の時刻において, 式 (5) は以下の陽的 な式で表せる.

$$\{u_{\alpha}\}_{n+1} = -\left[(\Delta t)^2 [M]^{-1} [K] + 2[E] \right] \{u_{\alpha}\}_n - \{u_{\alpha}\}_{n-1} + (\Delta t)^2 [M]^{-1} \{T_{\alpha}\}$$
 (6)

ここで、 Δt は時間増分、[E] は単位行列である.式 (6) に初 期条件を代入し、逐次的に解くことで変位 $u_{\alpha}(x,t)$ を得る ことができる.

4. 3次元イメージベースモデリング

イメージベースモデリングを適用するにあたって,本研 究では非均質材料の1つであるコンクリートに着目する. コンクリートの断層画像から有限要素モデルを作成する

Key Words: FEM, イメージベースモデリング, 非均質材料
 〒 376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1 群馬大学大学院理工学府 TEL.0277-30-1610 E-mail:t12305007@gunma-u.ac.jp

材料	S 波速 (m/s)	P 波速 (m/s)	密度 (kg/m3)	
モルタル	2250	3950	2050	
骨材	2500	4400	2600	
空気	0	340	1.2	

表–1 解析に用いる材料定数

手順を図1に示す.まず,X線CTにより撮影されたコンク リートの断層画像を重ね合わせ,3Dモデルを作成し,三値 化処理を施すことでモルタル,骨材,空隙をそれぞれ緑,橙, 黒と色分けをする.次に三値化処理を施した3Dモデルの ボクセルを8つの格子点で構成された立方体要素に対応さ せることで有限要素モデルに変換し,モデルデータから格 子点座標,要素の番号,材料の種別をそれぞれ抽出する.こ れらの詳細については,例えば,文献1)を参照されたい.

5. 数值解析例

本手法を用いた数値解析例を示す.まず,図1右上のよう な 60mm 立方の 3D モデルを作成する.解像度が 512×512 である X 線 CT 画像を画像処理によって 120×120 にサイ ズ変更し, x_3 方向に 120 断面分の画像を重ねた.この場合, 格子間隔 Δx は 0.5mm, 要素数は 1728000 個である. モルタ ル, 骨材および空気中を伝搬する弾性波の波速, 密度は表-1 の値を用いた.また,解析には, 波動伝搬に影響のある骨材 を含まないモルタル, 骨材を含むコンクリートを対象とし, それら表面の境界条件を応力フリーで与え, モデル上面中 央の一点に入射波として, 周期 $T = 2.5\mu s$ で鉛直変位 u_3 を 次のように与えた.

$$u_3^{\rm in} = u_0(1 - \cos 2\pi\alpha) \quad \alpha = \begin{cases} \frac{t}{T} & (0 \le t \le T) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$
(7)

ここで、 u_0 は入射波の振幅である.時間増分 Δt は、骨材 に対する P 波の速度 c_p を用いたクーラン条件より、 $\Delta t \leq \Delta x/2c_p$ であることから $\Delta t = 3.0$ ns とし、総ステップ数は 10000 とした.図 2 にモルタルおよび、コンクリート供試体 に対する $t = 12\mu s$ での変位場 |u| を示す.なお、図 2 (a)、(b) は $x_1 - x_2$ 中央面内、図 2 (c)、(d) は $x_2 - x_3$ 中央面内にお ける結果を示している.図 2 (a)、(b) では、円形に伝搬する P 波が確認でき、特に、図 2 (b) では、骨材、空隙による P 波の 散乱を確認できる.図 2 (c)、(d) では、P 波、S 波および、それ ら自由境界での反射波が確認でき、特に、図 2 (d) では S 波 通過後に、散乱 S 波を確認できる.

次に,図3にモルタルおよび,コンクリート供試体に対す る変位場 |u|の時間変化を3次元可視化した結果を示す.図 3 (a), (b) では,波動が球形に伝搬し,図2で示した面内での 結果と同様の結果が得られている.図3(c), (d) ではP波, S 波の反射が確認でき,特に,図3(d) では,骨材や空隙による P波,S波の散乱も確認できる.以上から,解析は正しく実 行されていると考えられる.

まとめ

X線CTで撮影した断層画像を用いてイメージベースモ デリングを行い,有限要素法によってコンクリート中を伝







図 3 モルタル (左列) および, コンクリート (右列) 供試体におけ る, 変位場 |u| 時間変化の 3 次元可視化結果,(a)(b) t = 12µs, (c)(d) t = 18µs

搬する弾性波動のシミュレーションを行った. デジタルデー タのボクセルと,有限要素法の立方体要素を一対一で対応 させることで,非均質材料の形状を有限要素モデルに反映 することができた. さらに,コンクリートに対する3次元波 動伝搬解析を行い,結果を可視化することで本手法の有効 性を示した. 今後の課題として,本手法を用いて,鋼材が貫 通しているコンクリートなど,異種材料が混在する,多種多 様なモデルの解析を可能にすることを目指す. さらに,医療 技術など,他分野への応用についても考えていきたい. 参考文献

- 中畑和之・木本和志・廣瀬壮一:動弾性有限積分法を用いた 波動伝播解析のためのイメージベースモデリング,計算数理工 学論文集, Vol.7, (2), pp.267-272, (2008).
- 小林昭一編著:波動解析と境界要素法,京都大学学術出版会, (2000).
- (1991)
 (1991)