

インピーダンス境界条件を考慮した時間域境界要素法による音場解析

中央大学	学生員	高木	貴弘
京都大学大学院	正会員	吉川	仁
中央大学大学院	学生員	岡村	理一郎
中央大学	正会員	櫻山	和男

1. はじめに

近年のコンピュータの性能の向上に伴い、都市空間の騒音の評価には波動音響理論や幾何音響理論に基づく数値シミュレーションが広く用いられている。本研究では、複雑な音場環境の解析に適している波動音響理論に基づいた音場解析を行う。数値シミュレーション手法としては、外部問題に適している境界要素法¹⁾を用いる。また、著者らのこれまでの研究²⁾では完全反射境界を用いた音場解析が行われてきたが、実際の路面や遮音壁は音波が一部透過するために、本研究では適用性の向上を図るためインピーダンス境界条件の考へる。インピーダンス境界を考慮することにより、より現実に近い音場の数値解析が可能となることを目指す。

本報告では、インピーダンス境界を持つ初期値境界値問題の数値解析の妥当性の検証をするために3次元非定常の音場解析を行う。

2. インピーダンス境界条件を考慮した初期値・境界値問題

(1) インピーダンス境界条件

次に示すインピーダンス境界条件をもつ波動問題を考へる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{in } D) \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\rho_a}{Z_n} \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{on } S) \quad (2)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad (\text{in } D) \quad (3)$$

$$u(\mathbf{x}, t) \rightarrow u_{\text{in}}(\mathbf{x}, t), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (\text{in } D) \quad (4)$$

ここに、 u は音圧、 n は領域からの外向き単位法線ベクトル、 ρ_a は空気の密度、 Z_n はノーマル音響インピーダンス、 u_{in} は入射波である。 D 、 S はそれぞれ解析領域、解析境界を示す。また、ノーマル音響インピーダンスは空気中の音速 c 、音圧反射率 γ および入射角 θ (入射波が反射境界面に対して垂直入射のとき $\theta = 0$) を用いることにより次式で表される。

$$Z_n = \frac{\rho_a c}{\cos \theta} \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \quad (5)$$

式(5)より境界条件(2)は次式のように表される。

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\cos \theta}{c} \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \quad (6)$$

また、入射波が反射面に対して垂直に入射した場合、境界条件は透過パラメータ $\beta (= \frac{1-\gamma}{1+\gamma})$ を用いて次のように示される。

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\beta}{c} \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \quad (7)$$

境界条件式(7)において右辺の $\frac{\partial u}{\partial t}$ は直接与えられていないので差分によって近似する。本報告では、1次精度の差分近似である式(8)と2次精度の差分近似である式(9)を考へる。

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, l\Delta t) = \frac{u(\mathbf{x}, l\Delta t) - u(\mathbf{x}, (l-1)\Delta t)}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, l\Delta t) &= \frac{3u(\mathbf{x}, l\Delta t) - 4u(\mathbf{x}, (l-1)\Delta t) + u(\mathbf{x}, (l-2)\Delta t)}{2\Delta t} \\ &\quad + O(\Delta t^2) \quad (9) \end{aligned}$$

ここに、 Δt は時間増分、 l は時間ステップを表す。

(2) インピーダンス境界条件を考慮した時間域境界要素法式(1)に対応する境界積分方程式は次式で得られる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u(\mathbf{x}, t) &= u_{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \int_0^t \int_S \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - t_0) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}, t_0) dS dt_0 \\ &\quad - \int_0^t \int_S \frac{\partial \Gamma}{\partial n}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - t_0) u(\mathbf{y}, t_0) dS dt_0 \quad (10) \end{aligned}$$

ここに、 Γ は、3次元波動方程式の基本解を表す。空間を区分一定要素、時間を区分線形補間で離散化し、数値的に u を求める。このとき得られる境界積分方程式を代数方程式の形で表すと次式のようになる。

$$D^1 \mathbf{u}^l = \sum_{m=1}^l S^m \mathbf{q}^{l+1-m} - \sum_{m=2}^l D^m \mathbf{u}^{l+1-m} + \mathbf{u}_{\text{in}}^l \quad (11)$$

ここに、 \mathbf{q}^l 、 \mathbf{u}^l 、 \mathbf{u}_{in}^l をそれぞれ l ステップ目における $\frac{\partial u}{\partial n}$ 、 u 、 u_{in} からなる節点ベクトルとし、 S^m と D^m を $(m-1)$ ステップ前の境界要素から受ける影響を示す1重層、2重層の影響係数行列とする。このとき、 \mathbf{q}^l は境界条件式(7)および差分近似式(8)または(9)により未知量 \mathbf{u}^l に依存している。そこで、 \mathbf{q}^l を \mathbf{u}^l の項とその他の項に分け、 \mathbf{u}^l の項を左辺に移動することにより、次に示す代数方程式が得られる。

$$\tilde{D}^1 \mathbf{u}^l = \sum_{m=1}^{l-1} \tilde{S}^m \mathbf{v}^{l-m} - \sum_{m=2}^l \tilde{D}^m \mathbf{u}^{l+1-m} + \mathbf{u}_{\text{in}}^l \quad (12)$$

キーワード：境界要素法、音響、インピーダンス境界条件

連絡先：〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学 E-mail: t.takagi@civil.chuo-u.ac.jp

ここで、 $\frac{\partial u}{\partial t}$ を1次精度の差分式(8)で近似したとき \tilde{S}^m , \tilde{D}^m , v^{l-m} は

$$\tilde{S}^m = \frac{\beta}{c\Delta t} S^m, \tilde{D}^m = D^m + \frac{\beta}{c\Delta t} S^m, v^{l-m} = u^{l-m} \quad (13)$$

である。 $\frac{\partial u}{\partial t}$ を2次精度の差分式(9)で近似したとき

$$\tilde{S}^m = \frac{\beta}{2c\Delta t} S^m, \tilde{D}^m = D^m + \frac{3\beta}{2c\Delta t} S^m, v^{l-m} = 4u^{l-m} - u^{l-1-m} \quad (14)$$

となる。

3. 数値解析例

インピーダンス境界条件を考慮した時間域境界要素法の妥当性の検証のための数値解析例として、次の3次元非定常波動問題を取り上げる。

(1) 解析例 1

図-1に3次元半無限領域における非定常波動問題の解析モデルを示す。境界 $x_3 = 0$ の一辺の長さが5.0の正方形の部分を要素分割する。解析する時間は $0.00 < t \leq 4.00$ である。また、境界条件と入射波の値を以下に示す。

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\rho_a}{Z_n} \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{on } S) \quad (15)$$

$$u_{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}}{c}\right)\right) \quad (16)$$

入射波として、入射方向が $\mathbf{d} = (0, 0, -1)$ の平面波を1波長のみ与え、反射境界にはインピーダンス境界条件を与える。波速、周期はそれぞれ $c = 1.0$, $T = 2.0$ とし、音圧反射率を $\gamma = 0.00$ (完全透過)、時間増分を $\Delta t = 0.20$ 、時間ステップ数を20、最大 mesh 幅を $\Delta x = 0.20$ 、境界要素数を1400とする。この条件において、境界条件の近似方法の違いによる精度の比較を行う。近似方法は1次精度の差分近似式(8)および2次精度の差分近似式(9)とする。

図-2に解析境界の中心点 $(x_1, x_2, x_3) = (0.0, 0.0, 0.0)$ における u の時間変化について、近似方法の違いによる比

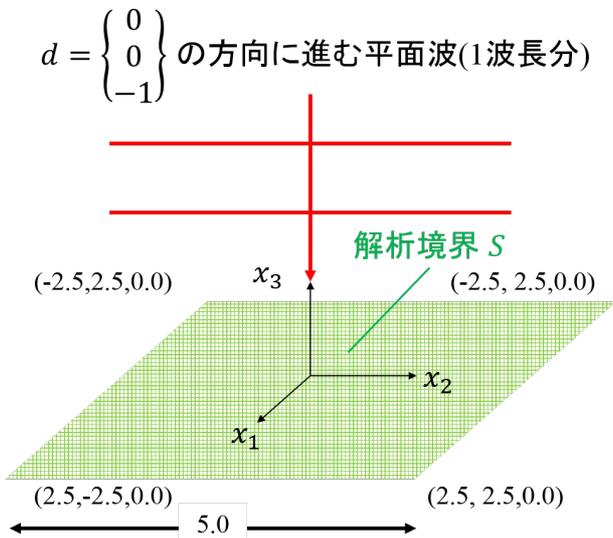


図-1 解析モデル

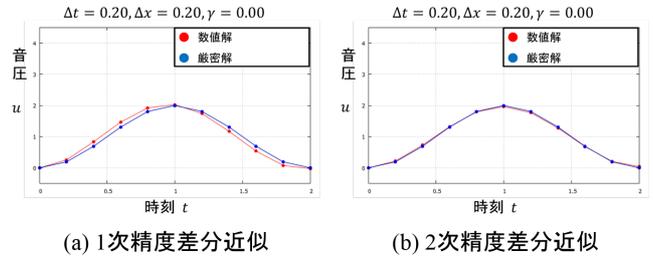


図-2 境界値の時間変化の比較 ($\gamma = 0.00$)

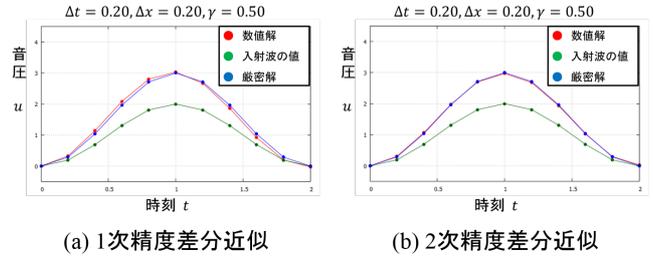


図-3 境界値の時間変化の比較 ($\gamma = 0.50$)

較結果を示す。図より2次精度の差分によって境界条件を近似した場合のほうが、数値解と厳密解が良い一致を示すことが確認できる。

(2) 解析例 2

解析例1の条件から音圧反射率を $\gamma = 0.50$ (一部反射・一部透過)に変更して境界条件の近似方法の違いによる精度の比較を行う。

図-3に解析境界の中心点 $(x_1, x_2, x_3) = (0.0, 0.0, 0.0)$ における u の時間変化について、近似方法の違いによる比較結果を示す。図より一部反射・一部透過の場合も2次精度の差分によって境界条件を近似した場合のほうが、数値解と厳密解が良い一致を示すことが確認できる。

4. おわりに

本報告では、境界要素法による音場解析の基礎段階としてインピーダンスを考慮した境界条件の解析の妥当性の検証を行い、以下の結論を得た。

- 2通りの音圧反射率において、境界条件式の近似方法の変更による境界値の精度の変化を確認することができた。
- sin波においては、1次精度の差分近似式に比べて2次精度の差分近似式を用いて境界条件を近似することが望ましいことが確認できた。

今後の課題として、インピーダンス境界条件を持つ遮音壁を有する解析領域へ適用が挙げられる。

参考文献

- 1) 小林昭一：波動解析と境界要素法，京都大学学術出版会，pp.37-38，2000。
- 2) 岡村理一郎，吉川仁，高橋徹，櫻山和男：時間域多重極境界要素法を用いた大規模音場解析による道路交通騒音の可聴化，応用力学論文集，土木学会，Vol.18，2016。(印刷中)