時間領域 DG-FEM を用いた騒音伝播解析手法の構築研究

中央大学大学院学生員中村和寛中央大学正会員樫山和男(株) 建設環境研究所正会員志村正幸

1. はじめに

都市部における交通施設の計画・設計を行う上で,騒音レベルを予測することは重要であり,幾何音響理論や波動音響理論に基づく数値シミュレーションが広く用いられている.幾何音響理論は計算時間が短く,リアルタイムシミュレーションを行えるが,複雑な音場への適用性に問題がある.一方波動音響理論は,複雑な幾何形状を有する問題でも適応可能であるが,計算規模が増大する.

本研究では,複雑な幾何形状を有する領域での騒音予測手法の構築を目的として,波動音響理論に着目する.離散化手法には任意形状への適合性に優れた有限要素法 (FEM)を用いるが,その中でも近年注目されている Dicontinuous Galerkin (DG)法¹⁾²⁾を用いる.本論文では,本手法の妥当性と有効性を検証するため,初期波形を有する 1 次元波動伝播問題を取り上げ,波長分割と要素の次数を変えた解析結果と理論解との比較を行った.

2. 数值解析手法

(1) 支配方程式

本研究で扱う支配方程式は,空気中の波動伝播を考慮した1次元の連続式と運動方程式とし,保存型表記すると以下のようになる.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

ここで , \mathbf{U} , $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ は保存変数と流速関数であり , 以下のように定義する .

$$\mathbf{U} = [p, u]^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \left[\rho c^2 u, \frac{p}{\rho}\right]^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

また , p,u,c,ρ は音圧 , 粒子速度 , 音速 , 空気の密度である . (2) DG-FEM に基づく空間方向の離散化

 DG 法とは , 要素内で独立に関数を定義でき , 要素境界において局所的な flux の収支を考慮して解析を行う手法である . 式 (1) に対して $\mathrm{DG\text{-}FEM}$ に基づく離散化を適用すると以下の弱形式が得られる .

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{U}^* \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{U}) d\Omega - \int_{\partial \Omega_e} \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{U}) d\Omega \quad (4)$$

ここで, \mathbf{U}^* は保存変数 \mathbf{U} の重み関数である. Ω_e , $\partial\Omega_e$, $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{U})$ は要素の領域,要素境界,要素境界上で考慮する数値 flux である.なお, \mathbf{U}^* , \mathbf{U} の補間近似に用いる基底関数には Legendre 多項式を適用し,数値積分には Legendre Gauss 法を適用する.関数の直交性により,式 (4) の第一

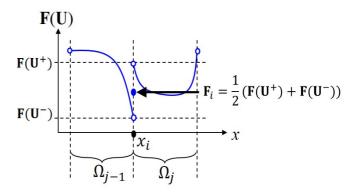


図-1 数値 flux の算出図

項は対角成分のみの質量行列となり,質量行列の集中化を施すことなく陽的な時間発展の適用が可能となる.本研究では,式 (5) を用いて数値 flux を算出する (図-1).

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \Big(\mathbf{F}(\mathbf{U}^+) + \mathbf{F}(\mathbf{U}^-) \Big)$$
 (5)

(3) 時間方向の離散化

式(4)をまとめると,式(6)のように表せる.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{L}(\mathbf{U}) \tag{6}$$

式 (6) に対して,2 段階 2 次精度陽的 Runge-Kutta 法を用いると以下の式が得られる.

$$\bar{\mathbf{U}}^{n+\frac{2}{3}} = \mathbf{U}^{\mathbf{n}} + \frac{2\Delta t}{3} \mathbf{L}(\mathbf{U}^{\mathbf{n}})$$
 (7)

$$\mathbf{U^{n+1}} = \mathbf{U^n} + \frac{\Delta t}{4} \left(\mathbf{L}(\mathbf{U^n}) + 3\mathbf{L}(\bar{\mathbf{U}}^{n+\frac{2}{3}}) \right)$$
(8)

3. 数值解析例

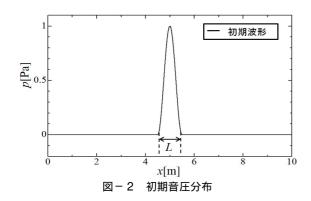
本手法の妥当性と有効性を検証するため,初期波形を有する1次元波動伝播問題を取り上げ,波長分割と要素の次数を変えた解析結果と理論解との比較を行う.

(1) 解析条件

a) 初期条件

図 - 2 に示すような長さ $10\mathrm{m}$ の解析領域に対して,中心の音圧 $p=1.0\mathrm{Pa}$,波長 $L=1.0\mathrm{m}$ とした \cos 関数を初期音圧分布として配置する.なお,Legendre 多項式を適用すると要素境界(節点)上に直接初期条件を与えられないため, $L^2\mathrm{Projection}$ を用いて初期音圧分布を配置する.また,粒子速度 u は全要素で $0\mathrm{m/s}$ とする.

KeyWords: 波動音響理論,有限要素法,Discontinuous Galerkin 法,騒音伝播,陽的 Runge-Kutta 法 連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: nakamura@civil.chuo-u.ac.jp



b) 境界条件

解析領域の左端と右端には,以下に示す完全反射条件を 用いる.

$$p_1^- = p_1^+ \quad \text{on} \quad x = 0.0$$
 (9)

$$p_N^+ = p_N^- \quad \text{on} \quad x = 10.0$$
 (10)

$$u_1^- = -u_1^+ \quad \text{on} \quad x = 0.0$$
 (11)

$$u_N^+ = -u_N^- \quad \text{on} \quad x = 10.0$$
 (12)

ここで,添字の 1 と N はそれぞれ解析領域左端の要素境界と右端の要素境界を意味する.

c) その他の解析条件

CFL 条件は解析時間 t=10.0s 内において,数値振動しない範囲で出来るだけ大きくとることとする.波長分割と要素の次数によらず Courant 数は 0.04 で一定とし,これをもとに微小時間増分量 Δt を決定する.なお,c=1.0m/s, ρ =1.0kg/m 3 とする.

(2) 解析結果

図-3 は波長分割 20 の場合の 1 次, 2 次要素における音圧分布である.なお, 1 次要素は要素境界における音圧値を, 2 次要素は要素境界と数値積分で用いた積分点(各要素で 3 点)における音圧値を算出する.理論解との比較より,要素の次数を問わず安定して伝播していることが確認できる.図-4, 5 は t=10.0s における各要素次数での波長分割 8, 20 の場合の音圧分布である.波長分割数を少なくすることにより, 1 次要素では音圧のピーク値が下がりアンダーシュートも顕著になるが, 2 次要素ではその影響がみられないことが確認できる.図-6 は t=2.5s における各要素次数でのメッシュ空間解像度と理論解との相対誤差の関係であり, Δx はメッシュ幅を意味する. 1 次要素を用いた解析結果より 2 次要素の解析結果の方が,高い計算精度を有していることが確認できる.

4. おわりに

本論文では,初期波形を有する1次元波動伝播問題を取り上げ,妥当性と有効性の検討を行い以下の結論を得た.

- DG-FEM 基づく解析結果は理論解とよい一致を示し、本手法の妥当性を確認した.
- メッシュ空間解像度と相対誤差の関係より,2次要素の解析結果は1次要素と比べ高い計算精度を有しており,高次要素を用いることの有効性を確認した.

今後の課題として,本手法のより高次要素への適応と多次元化への拡張を行う予定である.

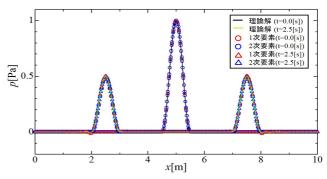


図 - 3 1,2次要素における音圧分布 (t=0.0s, 2.5s)

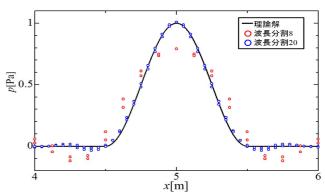


図 - 4 $t=10.0 \mathrm{s}$ における 1 次要素の音圧分布

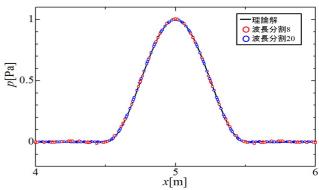


図 -5 t=10.0s における 2 次要素の音圧分布

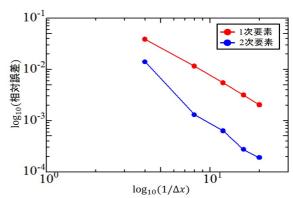


図 -6 メッシュ空間解像度と相対誤差の関係 (t=2.5s)

参考文献

- Mahboub Baccouch, A local discontinuous Galerkin method for the second-order wave equation, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 209-212, 2012, pp129-143.
- 2) T. Lahivaara, T. Huttunen, A non-uniform basis order for the discontinuous Galerkin method of the 3D dissipative wave equation with perfectly matched layler, Jounal of Computational Physics, 229, 2010, pp5144-5160.