

DG 有限要素法に基づく津波解析手法の構築研究

中央大学 学生会員 ○花澤 広貴
中央大学 学生会員 伊藤 翔
中央大学 正会員 檜山 和男

1. はじめに

近年、地震に伴う津波、台風や豪雨に伴う高潮、洪水などの水害が深刻化してきている。これらの被害を予測する手段として、数値シミュレーションが広く用いられており、その精度の向上が求められている。津波、高潮、洪水などの現象は不連続な解を有しやすく、これを精度よく表現するためには細かなメッシュが必要とされる。この欠点に対する手法の一つとして、DG 有限要素法¹⁾ (以下 DG 法) に関する研究が多くなされてきている。DG 法は要素間の不連続性を考慮し、高次要素を用いやすいという特徴を有する。

本研究では、DG 法を用いた津波解析手法の構築を行うことを目的とする。本論文では 1 次元浅水長波方程式に対して DG 法を適用し、数値解析例として段波問題を取り上げその妥当性について検討する。

2. 数値解析手法

(1) 支配方程式

支配方程式には、以下に示す 1 次元浅水長波方程式を用いる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{U}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{S}$ はそれぞれ未知変数、流束関数、ソース項に関するベクトルであり、以下のように表される。

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} H \\ uH \end{bmatrix}, \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} uH \\ u^2H + \frac{1}{2}gH^2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -gH(S_0 + S_f) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

ここで、 H は全水深、 u は断面平均流速、 g は重力加速度、 S_0 は水底勾配、 S_f は底面せん断応力であり、 S_0 , S_f は以下のように表される。なお、 z は基準面からの高さ、 n はマンニングの粗度係数である。

$$S_0 = \frac{\partial z}{\partial x}, S_f = \frac{gn^2u|u|}{H^{\frac{1}{3}}}. \quad (4)$$

(2) 空間方向の離散化

支配方程式 (1) に対して、空間方向の離散化として一次要素を用い、DG 法を適用すると以下に示す弱形式が得られる。

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} v \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dx - \int_{x_{j-1}}^{x_j} \mathbf{F} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \hat{\mathbf{F}}_j \gamma_{in} v \Big|_{x_{j-1}}^{x_j} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} v \mathbf{S} dx, \quad (5)$$

ここで、 v は重み関数、 $\hat{\mathbf{F}}_j$ は数値フラックス、 $\gamma_{in} v$ は v の要素境界での値である。未知変数及び重み関数を補間近似す

る際、基底関数には Legendre 多項式を用いる。式 (5) を整理すると以下に示す有限要素方程式が得られる。

$$\mathbf{M}_j \dot{\mathbf{U}}_j = \mathbf{F}_j + \mathbf{S}_j + \Phi^+ \hat{\mathbf{F}}_{j-1} - \Phi^- \hat{\mathbf{F}}_j, \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{M}_j$ は質量行列、 $\mathbf{F}_j$ はフラックス項に関するベクトル、 $\mathbf{S}_j$ はソース項に関するベクトル、 Φ^+ , Φ^- は要素境界における基底関数の値である。なお、各係数行列の計算には数値積分法を用いる。

(3) 数値フラックス

DG 法では、要素境界で物理量を複数有するため、数値フラックスを用いて要素境界での値を近似する。その際に用いる数値フラックスとして、本研究では以下に示す Local-Lax Friedrich Flux を用いる。

$$\hat{\mathbf{F}}_j = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{F}(\mathbf{U}_j^-) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_j^+) \right\} - \frac{a_{max}}{2} (\mathbf{U}_j^+ - \mathbf{U}_j^-), \quad (7)$$

ここで、 a_{max} は以下のように表される。

$$a_{max} = \max(|u^+ - c^+|, |u^- - c^-|, |u^+ + c^+|, |u^- + c^-|),$$

$$c^- = \sqrt{gH^-}, c^+ = \sqrt{gH^+} \quad (8)$$

(4) 時間方向の離散化

時間方向の離散化として 2 段階 2 次精度陽的 Runge-Kutta 法を用いると、式 (6) は以下のように表される。

$$\mathbf{M}_j \bar{\mathbf{U}}_j^{n+\frac{2}{3}} = \mathbf{U}_j^n + \frac{2}{3} \Delta t \mathbf{A}_j \mathbf{U}_j^n + \frac{2}{3} \Delta t \mathbf{C}_j \mathbf{U}_j^n + \frac{2}{3} \Delta t \mathbf{B}_j \mathbf{U}_b^n, \quad (9)$$

$$\mathbf{M}_j \mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n + \frac{\Delta t}{4} \mathbf{A}_j \mathbf{U}_j^n + \frac{\Delta t}{4} \mathbf{C}_j \mathbf{U}_j^n + \frac{\Delta t}{4} \mathbf{B}_j \mathbf{U}_b^n + \frac{3}{4} \Delta t \mathbf{A}_j \bar{\mathbf{U}}_j^{n+\frac{2}{3}} + \frac{3}{4} \Delta t \mathbf{C}_j \bar{\mathbf{U}}_j^{n+\frac{2}{3}} + \frac{3}{4} \Delta t \mathbf{B}_j \bar{\mathbf{U}}_b^{n+\frac{2}{3}}. \quad (10)$$

ここで、 Δt は微小時間増分量、 $\mathbf{A}_j$, $\mathbf{C}_j$, $\mathbf{B}_j$ はそれぞれフラックス項、ソース項、境界項に関する行列、 $\mathbf{U}_b$ は境界項に関するベクトルである。

(5) slope limiter 処理

不連続面で発生するオーバーシュート及びアンダーシュートに対する limiter 処理手法として、図-1 に示す Durlofsky's slope limiter²⁾ を適用する。slope limiter 処理では、要素 p に着目したとき、要素 p 及び隣り合う要素 e , w の中心座標における物理量を用いて得られる線形関数の傾きを比較し、節点値を修正する。以下に、そのアルゴリズムを示す。

KeyWords: DG 有限要素法, 浅水長波方程式, Runge-Kutta 法, slope limiter 処理

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL: 03-3817-1815 E-mail: hanazawa@civil.chuo-u.ac.jp

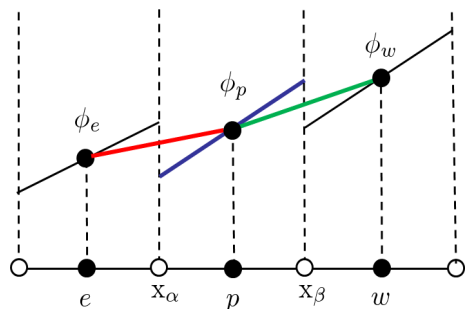


図-1 1次元要素モデル

1. 要素 p の線形関数を L_p (図1 青線), 要素 e と p で作られる線形関数を L_{ep} (図1 赤線), 要素 w と p で作られる線形関数を L_{wp} (図1 緑線) とし, そのうち最も勾配 $|\nabla L|$ の大きい線形関数を L とする.
2. L を要素 p の線形関数として置き換え, 以下の判定によってオーバーシュート及びアンダーシュートの有無を確認する.

$$\min(\phi_e, \phi_p) \leq L(x_\alpha) \leq \max(\phi_e, \phi_p)$$

$$\min(\phi_w, \phi_p) \leq L(x_\beta) \leq \max(\phi_w, \phi_p)$$

3. 上式を満足していれば, オーバーシュート及びアンダーシュートがないと判定され, このときの L を L_p とする. 上式を満足していない場合は, 2 番目に勾配の大きな線形関数を L とし, 2 の判定に戻る. これも満足しない場合は, 最も勾配の小さな線形関数を L とする.
4. 最終的に得られた L を要素 p の線形関数として置き換え, 節点値の修正を行う.

3. 数値解析例

本手法の妥当性の検討を行うため, 段波問題を取り上げる. 図-2 に示すような初期水位を与え, 両壁面は完全反射条件とする. メッシュ幅は 0.1m, 微小時間増分量は 0.01s, マニングの粗度係数は簡単のため $n = 0.0s/m^{1/3}$ とした. 図-3 は 1.0 秒後の水深と流速を limiter 処理の有無, 及び SUPG 法に基づく安定化有限要素法³⁾ で比較したものである. また, 図-4, 図-5 は $x=4m$ 及び $8m$ 付近での水深, 流速を拡大したものである. $x=4m$ 付近においては, DG 法は多少のオーバーシュート, アンダーシュートが見られるものの, CG 法と比べて解を鋭敏に表現できていることが確認できる. また, limiter 処理を適用することによって, $x=8m$ 付近でのオーバーシュート及びアンダーシュートが抑制できていることが確認できる.

4. おわりに

本研究では, 1次元浅水長波方程式に対して DG 法を適用し, その妥当性を検討するため段波問題を取り上げ, 以下の結論を得た.

- slope limiter 処理を導入することにより, 不連続面でのオーバーシュート及びアンダーシュートが抑制されていることが確認された.

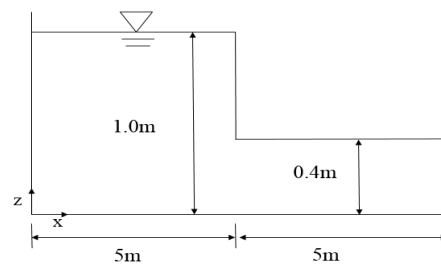


図-2 数値解析モデル

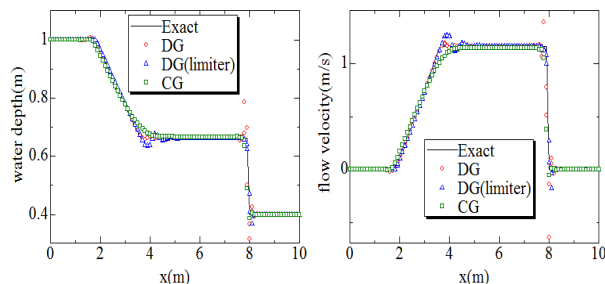
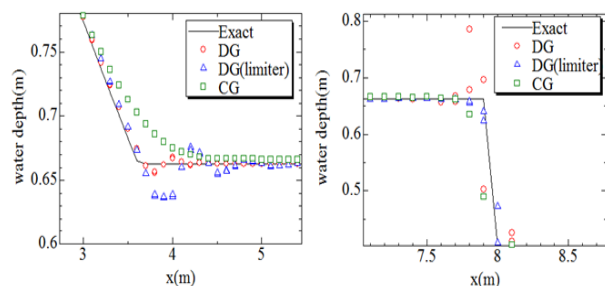
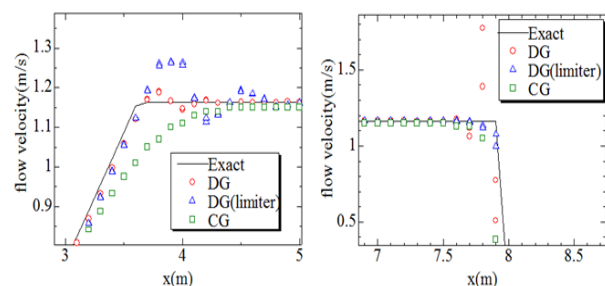


図-3 1.0 秒後の水深図及び流速図

図-4 $x=4m$ 及び $8m$ 付近での水深の拡大図図-5 $x=4m$ 及び $8m$ 付近での流速の拡大図

- DG 法の結果は, CG 法と比べて不連続面での解を鋭敏に表現できていることが確認された.

今後の課題として, 本手法の 2 次元問題への拡張, また高次要素での解析等が挙げられる.

参考文献

- 1) W.H.Reed, T.R.Hill: Triangular mesh methods for the neutron transport equation, *Los Alamos Report* LA-UR-73-479, 1973.
- 2) L.J.Durlofsky, B.Engquist, S.Osher: Triangle Based Adaptive Stencils for the Solution of Hyperbolic Conservation Laws, *Journal of Computational Physics*, Vol98, pp.64-73, 1992.
- 3) S.Takase, K.Kashiyama, S.Tanaka and T.E.Teduyar : Space-Time SUPG formulations of the shallow water equations, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol64, pp.1379-1394, 2010.