

一次元不定流計算の計算精度に関する研究

中央大学理工学部 学生会員 ○矢本 貴俊
中央大学理工学部 フェロー会員 山田 正

1. はじめに

一次元不定流の数値計算は古くから行われており、洪水解析の手法の一つとして確立されている。日本における最も長い河川で、河川長は約 360 km である信濃川を例に見るように、従来の不定流計算は数百 km の河川長を計算することが一般的であった。これは、日本だけでなく世界的にも言えることである。しかし、近年環境問題が注目され、地球規模のシミュレーションが行われている。地球温暖化を例に見ると、蒸発、降雨、洪水、地下水といったあらゆる水循環の要素を計算する必要があるが、すべてを計算するためには長江のような 6000 km 級の河川も丸ごと計算する必要がある。そのため、現代においては数千 km の河川を計算しなければならない。ところが、このような 6000 km 級の河川を対象として不定流計算が行われた前例は無く、計算過程において河川全域の物理量が保存されているかどうかチェックされていない。本研究では、河川長が約 6000 km である中国の長江を想定して一次元不定流計算を行い、流入量・流出量から求まる体積の保存率を指標として計算精度を検討した。

2. 基礎方程式

一次元不定流の基礎方程式として、フランスの Saint-Venant による基本式を用いた。以下の式(1)と式(2)はそれぞれ、連続の式と運動量保存の式である。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (Q^2/A)}{\partial x} + gA \frac{\partial h}{\partial x} - gA(I_0 - I_f) = 0 \quad (2)$$

ここに、 A :断面積[m²]、 Q :流量[m³s⁻¹]、 t :時間[s]、 x :位置[m]、 g :重力加速度[m/s²]、 I_0 :河床勾配、 I_f :摩擦勾配である。以下に示す式(3)は Manning の平均流速公式である。本研究では広幅矩形断面の開水路を想定するため、壁面に働く摩擦量は十分に小さいと仮定できる。よって、水理学的径深は水深 h に近似することができる。

$$v = \frac{1}{n} h^{2/3} \sqrt{I_f} \quad (3)$$

上式の各記号が表す意味は、 B :河川幅[m]、 h :水深[m]、 q :単位幅流量[m²s⁻¹]、 n :粗度係数 [m^{-1/3}s]である。本研究では流下方向に一樣な河道断面を設定するため等流状態に近似して考えることができ、 $I_f = I_0$ が成り立つ。式(1)と式(2)を、 $A=Bh$ 、 $Q=vA$ 、 $q=Q/B$ の関係および、式(3)を用いて変形すると、それぞれ式(4)と式(5)になる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial (qv)}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} - ghI_0 + g \frac{n^2 q |q|}{h^{7/3}} = 0 \quad (5)$$

3. 数値解析手法

3-1. 差分方程式

本研究における数値解析手法には、安定的に計算を

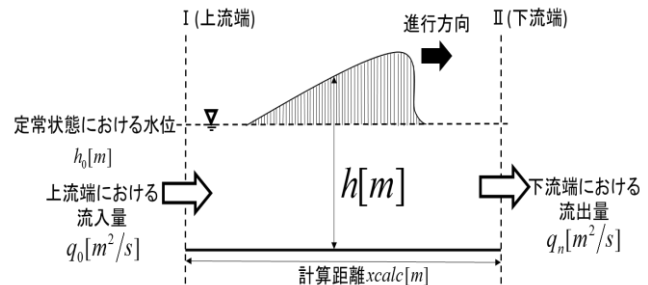


図-1 河川全体の流入・流出算定の概念図

行うために時間に関して前進差分、移流してくる物理量による影響を表現するために空間に関して後退差分を用いる。この差分法および、安定的に計算を行うスキームである Semi-Implicit スキームにより水深 h と単位幅流量 q を計算する。式(4)と式(5)を差分化して以下の式を得る。以下、 i は空間に関する格子点番号、 j は時間に関する格子点番号を表す。

$$\frac{h_i^{j+1} - h_i^j}{\Delta t} + \frac{q_i^{j+1} - q_{i-1}^j}{\Delta x} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{q_i^{j+1} - q_i^j}{\Delta t} + \frac{q_i^j v_i^j - q_{i-1}^j v_{i-1}^j}{\Delta x} + gh_i^j \frac{h_i^j - h_{i-1}^j}{\Delta x} - gh_i^j I_0 + g \frac{n^2 q_i^j |q_i^j|}{h_i^{7/3}} = 0 \quad (7)$$

3-2. 体積保存率の評価方法

本研究で用いる体積保存率の評価方法を以下に記す。図-1 に示すように、計算区間内の任意の点の水深は h_i [m] であり、定常状態における水深は h_0 [m] である。上流端における各タイムステップ毎の単位幅流入量は q_0 [m²s⁻¹]、下流端における単位幅流出量は q_n [m²s⁻¹] である。体積の増減の収支は、(上流端における総流入量[m³]) = (計算区間全体の体積増加量[m³]) + (下流端における総流出量[m³]) であり、数式で表すと式(8)である。上流端総流入量と下流端総流出量は各境界における単位幅流量を時間積分して求める。また、計算区間全体の体積増加量は図-1 における斜線部分であり、計算区間内の各点における水深を空間積分し、定常状態における体積との差を用いることにより算定する。

$$\int_0^{t_{calc}} q_0(t) dt = \int_0^{x_{calc}} h_i(x) dx + \int_0^{t_{calc}} q_n(t) dt \quad (8)$$

河川全域の体積保存率は、式(8)の左辺と右辺の相対誤差を算定することで評価する。

$$\varepsilon_r = \frac{\sum_{j=0}^m q_0^j \Delta t - \left(\sum_{i=0}^n h_i^j \Delta x + \sum_{j=0}^m q_n^j \Delta t \right)}{\sum_{j=0}^m q_0^j \Delta t} \times 100\% \quad (9)$$

ここで用いる空間の格子点番号 i は上流端から下流端にかけて $i=0, 1, 2, \dots, n$ であり、時間の格子点番号 j は初期時間から計算終了時間にかけて $j=0, 1, 2, \dots, m$ である。

キーワード 一次元不定流、保存率、Semi-Implicit スキーム

連絡先 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学理工学部 TEL.03-3817-1805 E-mail:yamoto@civil.chuo-u.ac.jp

4. 初期条件および境界条件

本研究の数値計算のために設定した河川は、中上流河川を想定した代表的な値として、全区間で河床勾配 1/10000、河川幅 200m、Manning の粗度係数 0.020 を与えた。初期条件としては、上流端境界において一定流量を、下流端境界条件に一定水深を与え、定常状態の各地点における水深および流量の値を河川全域に対して与えている。境界条件は、図-2 に示すように上流端境界条件として上流からの洪水波の入射を表現するためにタイムステップごとに変化する以下の式で示す流量を与えている。

$$Q_0(t) = Q_b + (Q_p - Q_b) \left(\frac{t}{t_p} \exp \left(1 - \frac{t}{t_p} \right) \right)^C \quad (10)$$

上式の各記号の表す物理量は、 Q_b : 基底流量[m³s⁻¹]、 Q_p : ピーク流量[m³s⁻¹]、 t_p : ピーク時間 [hour]、 C : 定数である。これらの値は、 $Q_b = 200 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ 、 $Q_p = 2000 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ 、 $t_p = 15 \text{ hour}$ 、 $C = 20$ を与える。ピーク前およびピーク後は流量の値は基底流量の値で定常な状態である。また、設定した格子点を使って計算ができるように上流端の水深は擬似的に等流水深を与える。

$$h_0^{i+1} = \left(\frac{n^2 q_0^{i+1/2}}{I_0} \right)^{3/10} \quad (11)$$

ここに、計算における時間に関する刻み幅は $\Delta t = 300 \text{ s}$ 、空間の刻み幅 $\Delta x = 3000 \text{ km}$ とする。計算距離は長江を想定して $x_{\text{calc}} = 6000 \text{ km}$ とし、計算時間は $t_{\text{calc}} = 2000 \text{ hour}$ とする。

5. 数値計算結果および考察

一次元不定流計算による数値計算結果を図-3 に示す。図-3 横軸は距離を表し、左端が上流端、右端が下流端である。縦軸は左軸が水深、右軸が流速である。 $t=0 \text{ hour}$ において水深は一律であったが、 $t=250 \text{ hour}$ では上流端から洪水波が入ってきて下流方向に向けて伝播している。洪水波はタイムステップが進む毎に下流方向へ移流し、各タイムステップにおける計算区間内の最大水深の値は減少していくことがわかる。 $t=1500 \text{ hour}$ においては水深は殆ど一様になっており、洪水流による影響は無くなっている。図-3 より、各タイムステップにおける水深の空間的なピーク地点において流速もピーク値を示している。このことは、ピーク前面においては流速差により空間に対する水深勾配が時間とともに急になり、ピーク後面においては水深勾配が緩やかになることを示している。これは、実現象として洪水流が到達したら急激に水深が増加し、ピークが過ぎても中々水深が減少しないことを表現している。また、表-1 に示す通り、体積保存に関する相対誤差は $t=0 \text{ hour}$ から $t=2000 \text{ hour}$ までの積算で 1.96% であった。これは計算過程において体積が 1.96% だけ増加していることを表している。

表-1 より誤差の原因を推察する。誤差の主要たる原因は上流端における総流入量と下流端における総流出量の差が大きいたことが挙げられる。図-3 における $t=1500 \text{ hour}$ 以降の水深グラフを見ると、下流端付近の水深が定常状態の水深よりも 0.1 m 程度大きくなっている。ピークが過ぎたら洪水流の影響がなくなり定常状態になるはずである。流速に関しても同様に下流端において定常状態の流速よりも 0.03 ms^{-1} 程度増加している。単位幅流量は $q = vBh$ より、下流端における水深と流速が共に増加したため、単位幅流量も増加する。このことが誤差が生じた原因であると考えられる。

6. まとめ

本研究で得られた知見を以下に述べる。

- 1) 一次元不定流の基本式の差分化に時間に関して前進差分、空間に関して後退差分を用いた Semi-Implicit スキームにより数値計算を行うことで、安定的に不定流計算ができることを示した。
- 2) 境界における流入量・流出量と計算区間全体の体積増加量を算定して体積の保存を評価した結果、高い精度で保存則が成り立つことがわかった。
- 3) 地点ごとの流速のちがいが、時間が経つにつれて洪水波の前面では水深の空間的な勾配が急になり、後面では水深の空間的な勾配が緩やかになることを明らかにした。

参考文献

- 1) 手計 太一, 吉谷 純一, スヴァンピモル チャンチャイ [他], 宮本 守, 山田 正: MIKE11 を利用したタイ王国・Chao Phraya 川流域水循環モデルの構築とその検証, 水文・水資源学会誌 = JOURNAL OF JAPAN SOCIETY OF HYDROLOGY & WATER RESOURCES 19(3), 212-220, 2006-05-05
- 2) 一木 慎太郎, 北田 悟, 呉 修一, Quimpo maritess, 山田 正: 河川狭窄部における洪水氾濫・流出特性, 土木学会関東支部技術研究発表会講演概要集 35 巻, 2008

表-1 境界の流入量・流出量および計算区間全体の体積増加量

上流端における 総流入量[m ³]	計算区間全体の 体積増加量[m ³]	下流端における 総流出量[m ³]
1350×10^6	4×10^6	1373×10^6

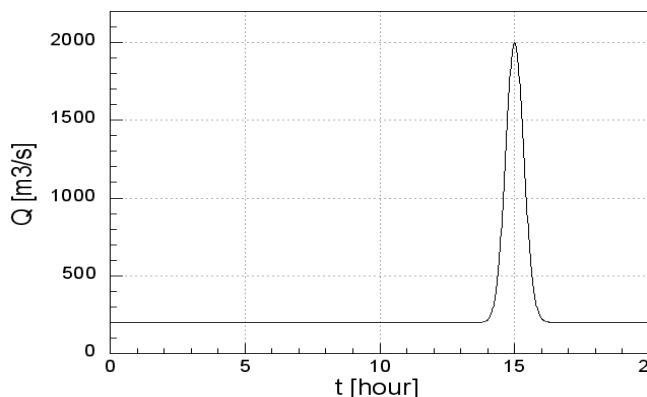


図-2 タイムステップごとに変化する上流端の流量

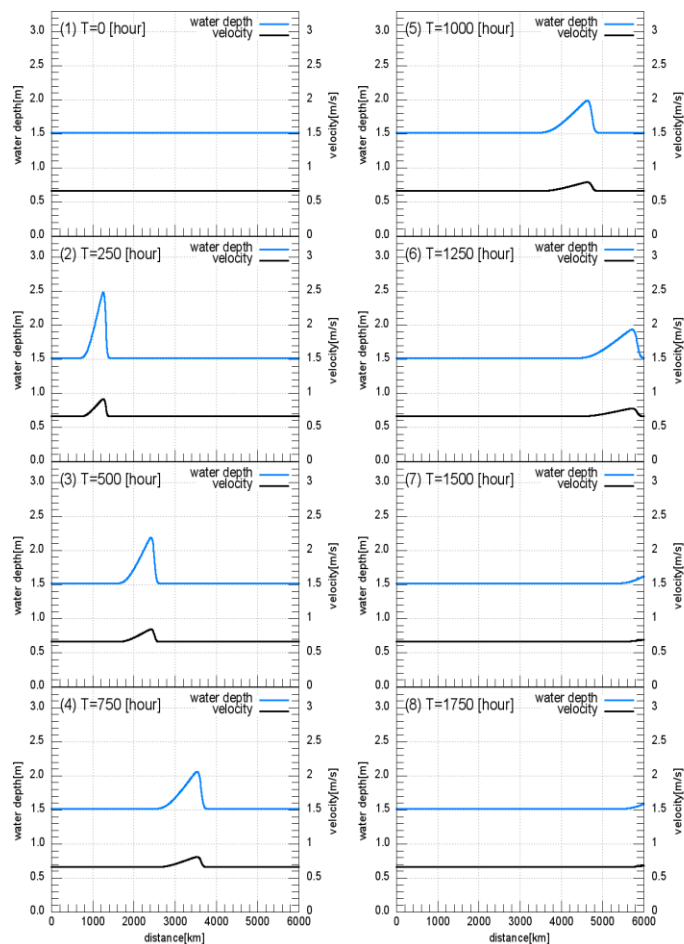


図-3 各タイムステップにおける水深と流速