

階段状水路における nonaerated skimming flow

日大院理工 学生会員 ○山元雄生
日大理工 正会員 高橋正行
日大理工 フェロー 大津岩夫

1 まえがき

急傾斜地の水路や堰・ダムを流下する高速流を傾斜面上で減勢させる方法として階段状水路は利用されている^{1),2)}。階段状水路に流入して skimming flow (各ステップ隅角部で常に渦の形成される流況¹⁾) が形成された場合、底面から乱流境界層が発達し、ある程度の距離を流下した断面で乱流境界層が水面に到達する (図 1)。この断面を inception point (以下 I.P. と略す) という。この断面より下流側では水面から空気が混入し aerated flow となる。すなわち, skimming flow は I.P. より上流側の nonaerated skimming flow と I.P. より下流側の aerated skimming flow に区分される。

最近, 階段状水路における擬似等流を対象に Takahashi and Ohtsu²⁾ は広範囲の水路傾斜角度 θ ($19^\circ \sim 55^\circ$) と相対ステップ高 S/d_c ($d_c (= \sqrt[3]{q^2/g})$ は限界水深, q は水の単位幅流量, g は重力加速度, S はステップ高) のもとで空気混入射流の特性量, すなわち空気混入流水深, 流速, 空気混入率, 比エネルギーの大きさを明らかにし, 水路傾斜角度 θ および相対ステップ高 S/d_c が空気混入流の特性量に与える影響を示した。さらに, 空気混入不等流に対して高橋・大津³⁾ は, $19^\circ \leq \theta \leq 55^\circ$ を対象に広範囲の S/d_c のもとで空気混入流水深, 流速, 空気混入率, 比エネルギーの大きさを明らかにし, 水面形を求める式を提示した。これらの研究成果を用いて空気混入階段状水路の水工設計法が示されている^{2),3)}。

低いダムや embankment dam などの低落差の階段状洪水吐で大流量の越流が生じたとき, 階段状水路上の流れが全て nonaerated skimming flow の流況となり, この場合の対応が水工設計上必要となる。すなわち, nonaerated skimming flow の水深, 流速, および比エネルギーの大きさをすることは洪水吐の導流壁高さや減勢池の設計上重要である。

Meireles and Matos⁴⁾ は $\theta = 26.6^\circ$ の nonaerated flow を対象に水深, 流速, 比エネルギーの大きさを推定するための実験式を提示した。また, Meireles et al.⁵⁾ は $\theta = 53^\circ$ の nonaerated flow を対象に傾斜始端から I.P. 断面までの距離, I.P. 断面までの水深を求める実験式を提示した。しかし, 階段状水路の水路傾斜角度 θ および相対ステップ高 S/d_c が流速, 比エネルギーにおよぼす影響については不明である。

本研究では, 水路傾斜角度 $\theta = 19^\circ, 30^\circ$ の階段状水路の不等流区間における nonaerated skimming flow の形成範囲, 水深, 流速, エネルギーの大きさの流下方向変化を示した。これらの結果を用いて, embankment dam に多く用いられている水路傾斜角度 $19^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ と相対ステップ高 S/d_c に対して, nonaerated skimming flow の領域における階段状水路の水工設計法を示した。

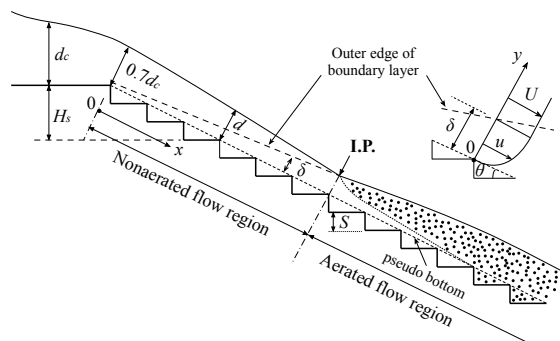


図 1: skimming flow における流れの領域図

表 1: 実験条件

θ ($^\circ$)	S (cm)	H_{dam} (cm)	S/d_c	q (m^2/s)
19, 30	1.5	36	0.2	0.0643
	1.5		0.3	0.0350
	3		0.4	0.0643
	3		0.5	0.0460
	6		0.8	0.0643
	6		0.9	0.0539

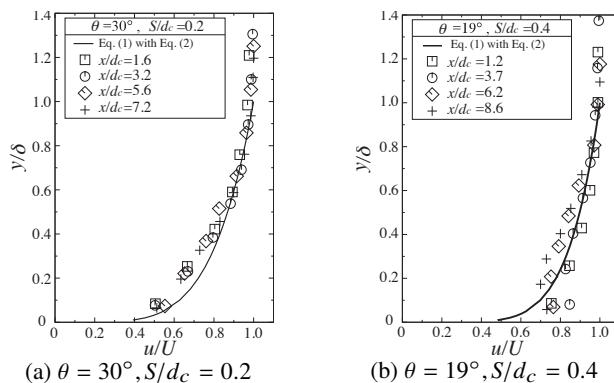


図 2: 乱流境界層内の流速分布

2 実験

Nonaerated skimming flow の流速 u の測定にはピトー管 (管径 3mm:JIS-B8330 規格), 水深 d の測定にはポイントゲージを用い, 表 1 に示す条件の下で実験を行った。

3 流速分布

図 2 に nonaerated skimming flow の乱流境界層内の流速分布を $u/U = f(y/\delta, \theta, S/d_c, x/d_c)$ の関係で整理した一例を示す。ここに, δ は乱流境界層厚さ, U は乱流境界層外縁流速である。なお, δ は $u = 0.99U$ となる高さとして定義している。図 2 に示されるように, 乱流境界層内の流速分布は次式に示す $1/N$ 乗則で近似され, N の値は流下距離 x/d_c に関

わらず一定である。

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/N} \quad (0 \leq y \leq \delta) \quad (1)$$

Takahashi and Ohtsu²⁾ は aerated flow における N の値を求める実験式を次のように提案している。

$$N = 14\theta^{-0.65} \frac{S}{d_c} \left(\frac{100}{\theta} \frac{S}{d_c} - 1 \right) - 0.041\theta + 6.27 \quad (2)$$

(2) 式を (1) 式に代入して得られた u/U を図 2 の実線で示す。図に示されるように、実線は実験値をほぼ満足している。これより、 N の値は空気混入の有無や x/d_c に関わらず、与えられた θ と S/d_c によって (2) 式から求められる。

4 乱流境界層の発達状態

平坦な傾斜水路において、 δ は次式によって示されている⁶⁾。

$$\frac{\delta}{x} = a \left(\frac{x}{k} \right)^{-b} \quad (3)$$

ここに、 a, b は定数、 k は壁面の平均凹凸高さである。階段状水路の skimming flow においては、 k を仮想底面 (図 1) より下の階段の凹凸によるものとする $k = S \cos \theta$ となる。実験により得られた δ を $\delta/x = f(x/k, \theta, S/d_c)$ の関係で整理すると、図 3 が得られる。(3) 式の関係式を用いて乱流境界層厚 δ を求めるためには、式中の定数 a, b の値を定める必要がある。以下に定数 a, b の導出過程を示す。

$q = \int_0^d u dy = U[d - \delta^*]$ より次式が得られる。ここに δ^* は排除厚さである。

$$U = \frac{q}{d - \delta^*} = \frac{q}{d - \delta/(1+N)} \quad (4)$$

I.P. の条件 $x = x_i, d = \delta = d_i, U = U_i$ を (3), (4) 式に代入すると、

$$d_i = a \frac{x_i^{-b+1}}{k^{-b}}, \quad (5)$$

$$U_i = \frac{1+N}{N} \frac{q}{d_i} \quad (6)$$

となる。ここに、 x_i は階段傾斜始端から I.P. までの流下距離、 d_i は I.P. での水深、 U_i は I.P. における水表面の流速である。

図 4 に示される断面①、②間においてエネルギー損失を無視できるものと仮定すると、階段状水路の傾斜始端 (断面②) における全水頭は堰上流側 (断面①) の全水頭と等しい。境界層外ではポテンシャル流として流れを取り扱えることを考慮して、断面②と断面④の間で自由水面の流線に沿ってベルヌーイの定理を適用する。また、限界流速 $V_c (= q/d_c = \sqrt{gd_c})$ で無次元化すると、

$$\frac{U_i}{V_c} = \sqrt{2 \left(\frac{x_i}{d_c} \sin \theta + 1.5 - \frac{d_i}{d_c} \cos \theta \right)} \quad (7)$$

となり、 $(x_i/d_c) \sin \theta \gg \{1.5 - (d_i/d_c) \cos \theta\}$ とすると、

$$\frac{U_i}{V_c} = \sqrt{2 \left(\frac{x_i}{d_c} \sin \theta \right)} \quad (8)$$

となる。(5) 式および (8) 式を (6) 式に代入し、 x_i/k について整理すると、

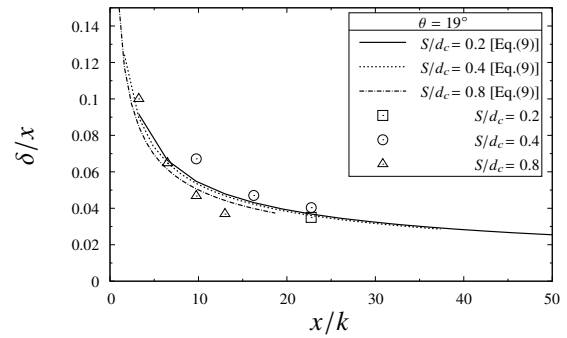


図 3: 乱流境界層厚さ

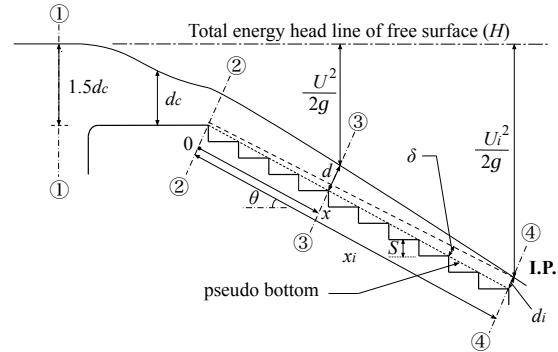


図 4: ベルヌーイの定理の適用区間

$$\frac{x_i}{k} = \left(\frac{1+N}{N} \frac{1}{a\sqrt{2}} \right)^{1/(1.5-b)} F_*^{1/(1.5-b)} \quad (9)$$

となる。

高橋・大津は x_i/k の実験式を次のように提案している⁷⁾。

$$x_i/k = 5.0 F_*^{0.97} \quad (19^\circ \leq \theta \leq 30^\circ) \quad (10)$$

ここに、 F_* は roughness Froude number であり、 $F_* = q/\sqrt{g \sin \theta k^3}$ で定義される。

(9) 式および (10) 式より、 $a = 0.135(1+N)/N$ 、 $b = 0.469$ となり、それらの値を (3) 式に代入すると、境界層厚 δ の実験式 (11) が得られる。

$$\frac{\delta}{x} = 0.135 \frac{1+N}{N} \left(\frac{x}{k} \right)^{-0.469} \quad (19^\circ \leq \theta \leq 30^\circ) \quad (11)$$

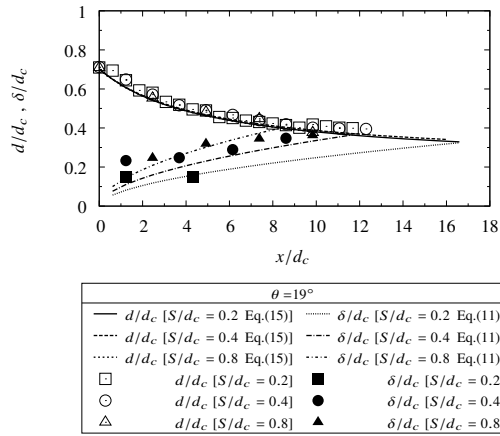
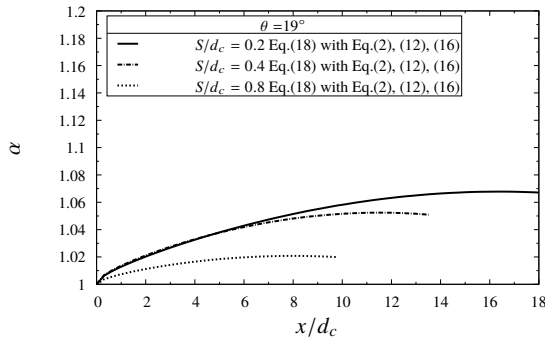
(11) 式から得られた値を図 3 の各線に示す。図 3 に示されるように δ/x は (11) 式で近似することができる。(11) 式を $[\delta/d_c = f(x/d_c, S/d_c, \theta)]$ の関係に変数変換すると (12) 式になる。

$$\frac{\delta}{d_c} = 0.135 \frac{1+N}{N} \left\{ \left(\frac{S}{d_c} \right) \cos \theta \right\}^{0.469} \left(\frac{x}{d_c} \right)^{0.531} \quad (12)$$

すなわち、与えられた $x/d_c, \theta, S/d_c$ に対して (2) 式と (12) 式を用いることで δ/d_c が求められる。

5 水面形

各ステップエッジを結んだ仮想底面 (図 4) を考え、階段状水路の傾斜始端 (図 4 の断面②) と nonaerated flow region 内の評価断面 ($x = x$, 図 4 の断面③) 間の自由水面の流線に沿ってポテンシャル流のベルヌーイの定理を適用すると

図 5: 水面形および乱流境界層発達に対する S/d_c の影響図 7: α に対する S/d_c の影響

次式が得られる.

$$\frac{3}{2}d_c + x \sin \theta = d \cos \theta + \frac{U^2}{2g} \quad (13)$$

速度水頭は (4) 式より,

$$\frac{U^2}{2g} = \frac{d_c^3}{2(d - \delta^*)^2} \quad (14)$$

となる. (14) 式を (13) 式に代入し, 流下距離 x で微分すると,

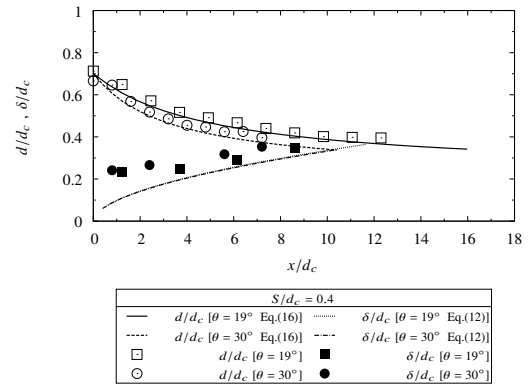
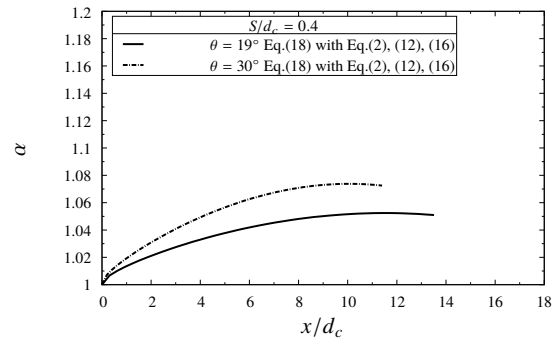
$$\frac{dd}{dx} = \frac{\sin \theta - \frac{d_c^3}{(d - \delta^*)^3} \frac{d\delta^*}{dx}}{\cos \theta - \frac{d_c^3}{(d - \delta^*)^3}} \quad (15)$$

となる. (15) 式を積分し, 後述の実験結果から $x = 0$ のとき $d/d_c \approx 0.7$ と $\delta^*/d_c \approx 0$ を適用し, さらに $\delta^* = \delta/(1+N)$ を代入すると, 解析的な水面形方程式 [(16) 式] が得られる.

$$\frac{d}{d_c} = \frac{1}{1+N} \left(\frac{\delta}{d_c} \right) + \left[(0.7)^{-2} + 2 \left\{ \left(\frac{x}{d_c} \right) \sin \theta - \left(\frac{d}{d_c} - 0.7 \right) \cos \theta \right\} \right]^{-0.5} \quad (16)$$

図 5, 6 に nonaerated skimming flow の水面形と乱流境界層の発達状態の一例を示す. 図 5, 6 に示されるように, (12) 式と (16) 式より求めた d/d_c の値と実験値はほぼ一致している. これより, 与えられた $x/d_c, \theta, S/d_c$ に対して nonaerated skimming flow の水面形は (16) 式で解析的に求められる.

図 5 に d/d_c および δ/d_c に対する S/d_c の影響を示す. 図に示されるように, 与えられた θ と x/d_c に対して, S/d_c の増加に伴い δ/d_c は増加する. 一方, S/d_c の変化が d/d_c

図 6: 水面形および乱流境界層発達に対する θ の影響図 8: α に対する θ の影響

に与える影響は小さい. これは自由水面が境界層外 (ポテンシャル流) の領域にあることから, 底面の粗さ (S/d_c) の変化が d/d_c に与える影響が小さかったものと考えられる.

図 6 に d/d_c および δ/d_c に対する θ の影響を示す. 図に示されるように, 与えられた S/d_c と x/d_c に対して, θ の変化が δ/d_c に与える影響は小さい. 一方, θ の増加に伴い d/d_c は小さくなる. これは, θ の増加に伴い, 重力の流下方向成分が大きくなったためと考えられる.

6 比エネルギー

Nonaerated flow のエッジ断面における比エネルギー E は, エッジ断面での圧力を静水圧分布と仮定すると, 次式で示される.

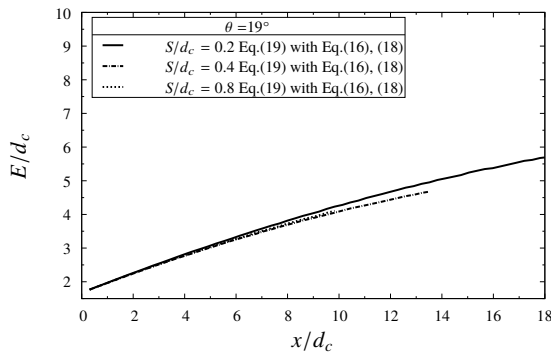
$$E = d \cos \theta + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (17)$$

ここに, $V (= q/d)$ は断面平均流速, α はエネルギー補正係数であり, (1) 式を用いると (18) で表される.

$$\alpha = \frac{1}{d} \left\{ \int_0^\delta \left(\frac{u}{V} \right)^3 dy + \int_\delta^d \left(\frac{U}{V} \right)^3 dy \right\} = \frac{\left(1 - \frac{3}{N+3} \frac{\delta}{d} \right)}{\left(1 - \frac{1}{N+1} \frac{\delta}{d} \right)^3} \quad (18)$$

(18) 式より, 与えられた N に対して, 境界層が未発達 ($\delta/d = 0$) のとき, $\alpha = 1$ である. 与えられた $\theta, S/d_c, x/d_c$ に対して, (2), (12), (16), (18) 式を用いることで, α は求められる.

θ と S/d_c の α への影響を図 7, 8 に示す. 図に示されるように, x/d_c の増加に伴い, α は増加する. また, 図 7 に示されるように, 与えられた θ と x/d_c に対して S/d_c が大きくなると α は小さくなる. さらに, 図 8 に示されるように, 与えられた S/d_c と x/d_c に対して θ が小さくなると α は小さくなる.

図 9: E/d_c に対する S/d_c の影響

α および d/d_c が求められると, nonaerated skimming flow の相対比エネルギー E/d_c は次式で得られる.

$$\frac{E}{d_c} = \frac{d}{d_c} \cos \theta + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{d}{d_c} \right)^{-2} \quad (19)$$

相対比エネルギー E/d_c の流下方向変化を図 9, 10 に示す. 図に示されるように与えられた $\theta, S/d_c$ に対して x/d_c の増加に伴い相対比エネルギー E/d_c は増加する.

図 9 に E/d_c に対する S/d_c の影響を示す. 図に示されるように, x/d_c が小さいとき, 与えられた x/d_c に対して S/d_c の大きさに関わらず E/d_c は一定値を示す. これは, 相対境界層厚 δ/d が小さく, 大部分がポテンシャル流の領域であることから, S/d_c の変化が E/d_c に与える影響が小さかったものと考えられる. また, x/d_c が大きくなる ($x/d_c \geq 6 \sim 7$) と, S/d_c の増加に伴い E/d_c は減少する.

図 10 に E/d_c に対する θ の影響を示す. 図に示されるように, 与えられた x/d_c と S/d_c に対して θ が小さくなると E/d_c は小さくなる.

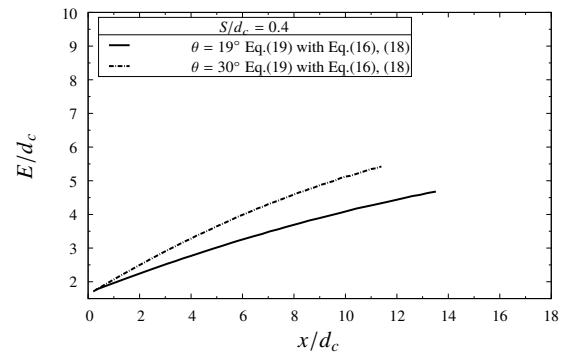
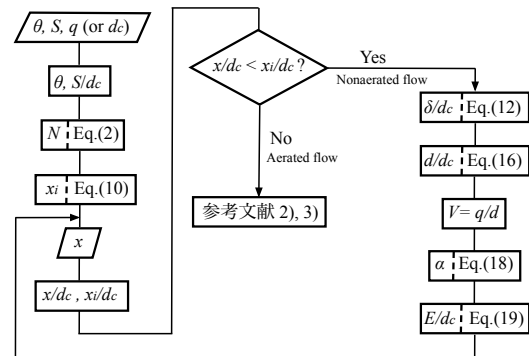
7 設計への応用

与えられた q (or d_c), θ, S, x に対して, (10) 式から I.P. までの距離 x_i が求められ, non-aerated flow ($x \leq x_i$) か aerated flow ($x \geq x_i$) のどちらが形成されるか予測できる. Nonaerated flow を対象に, 与えられた q (or d_c), θ, S, x に対して, d, V, E を求めるフローチャートを図 11 に示す. これを用いて E/d_c を算出した結果を図 9, 10 に示す. 図 11 を用いることで embankment dam に用いられることの多い水路傾斜角度 ($19^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$) および相対ステップ高さ ($0.2 \leq S/d_c \leq 0.9$) の階段状水路の nonaerated skimming flow の領域の d, V, E を予測することが可能である.

8 まとめ

Embankment dam に用いられることの多い, 水路傾斜角度 $\theta = 19^\circ \sim 30^\circ$, 相対ステップ高さ $S/d_c = 0.2 \sim 0.9$ の階段状水路における nonaerated skimming flow を対象に流速分布, 乱流境界層の発達, 水深について検討した結果を以下に示す.

- 乱流境界層内の流速分布は $1/N$ 乗則で近似される. N の値は空気混入の有無や x/d_c に関わらず, 与えられた θ と S/d_c によって (2) 式から求められる.
- 乱流境界層厚 δ は (12) 式で近似できる.
- 境界層厚 δ の実験式である (12) 式を (16) 式に代入することによって, 水面方程式 [(16) 式] が得られた.

図 10: E/d_c に対する θ の影響図 11: d, V, E の算出フローチャート

- 図 11 に示すフローチャートを用いると, 広範囲な $\theta, S/d_c$ に対して nonaerated skimming flow の水理量 (水深 d , 断面平均流速 V , 比エネルギー E) が求められる. すなわち, 階段状水路の導流壁の高さの決定や階段状水路下流減勢池の設計に必要な水理量を知ることが可能となった.

謝辞: 著者の一人 (高橋正行) は本研究の一部に科研費 (24560628) の助成を受けた. ここに記して謝意を表します.

参考文献

- Ohtsu, I., Yasuda, Y., Takahashi, M.: "Flow characteristics of skimming flows in stepped channels.", *J. Hydraul. Engrg.*, Vol.130, No.9, pp.860-869, 2004.
- Takahashi, M., Ohtsu, I.: "Aerated flow characteristics of skimming flow over stepped chutes.", *J. Hydraul. Res.*, Vol.50, No.4, pp.427-434, 2012.
- 高橋正行, 大津岩夫: "階段状水路における空気混入不等流解析", 土木学会論文集 B1 (水工学), Vol.69, No.4, pp.I_913-I_918, 2014.
- Meireles, I., Renna, F., Matos, J., Bombardelli, F.: "Skimming flow in the non-aerated region of stepped spillways over embankment dams.", *J. Hydraul. Engrg.*, Vol.135, No.8, pp.685-689, 2009.
- Meireles, I., Renna, F., Matos, J., Bombardelli, F.: "Skimming, non-aerated flow on stepped spillways over Rcc Dams.", *J. Hydraul. Engrg.*, Vol.138, No.10, pp.870-877, 2012.
- Bauer, W.J.: "Turbulent boundary layer on steep slopes" *Trans. ASCE* 119, pp.1212-1233, 1954.
- 高橋正行, 大津岩夫: "階段状水路における nonaerated skimming flow", 土木学会論文集 B1 (水工学), Vol.70, No.4, pp.I_781-I_786, 2014.