河床波の発生発達に関する基本方程式による非線形効果

中央大学大学院　　学生員　○徐　承煥
中央大学理工学部　　フェロー会員　　山田　正

１．はじめに

移動床流れにおいては, 流水と流砂の相互作用の結果として, 河床土砂礫の物理的化学的特性と水深、流速, 流路幅などの水理条件に応じて各種の河床形態が形成され，規模によって砂漣，砂堆，砂州などで分類されている. 中規模の砂州は河川の蛇行を引き起こし, 局所的に洗掘を生じさせて堤防災害の一因と成り得る. 河川防災や河道維持においてが与えられた水理条件に対してどのような形状特性を持った河床形態になるか予測することが重要である.

本研究は, 過去に多くの研究者によって行われてきた安定・不安定問題としてではなく，山田ら [1)] が導出した河床波の基本方程式を用いて, 河床波の非線形性による効果を数値的に解析したものである.

２．河床波の発生発達に関する基本式の導出

図-1 は河床上の流れの模式図である．ここで, U:流れの平均流速，u_0:底面流速，η:基準面からの河床の位置，q:流砂量，δ:遅れ距離，q_0:平衡流砂量，h:河床波が流れに影響を与える距離である．流砂量と河床波形態には流砂の連続式(1)が成立する. 非平衡状態にある実際の流砂量 q は q_0 に対して, 遅れ距離 δ 下流側にずれている．(2)式の q_0 は流砂量が局所的な関数であるとしたときの値である．(2)式をテイラー展開し，δ の２次までの項を考慮すると(3)式を得る．一般的に，平衡流砂量 q_0 と河床せん断応力 τ の間には $q_0 \propto \tau^n$ の関係が認められており，底面せん断応力を(4)式で表現すると，流砂量と河床形状の関係式(5)式を得る．ここに，c，m は係数であり，$m=2n, \alpha=n\beta$ である．α は河床波局所勾配の効果であり, 底面せん断応力と河床形状との間の位相差を表している．ここで, 河床波が存在することを考慮し、その近傍の流速を(6)式で表す. u_0'を河床波の影響による流速成分とし，$u_0{}^m$ は近似的に(7)式で表現できる．摂動をうけた底面流速成分は，(8)式のように表現する．ここに，$f(x,\eta)$は

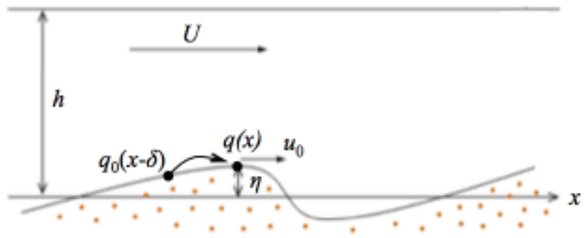

図-1　流れの模式図と記号の定義

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=0 \tag{1}$$

$$q(x)=q_0(x-\delta) \tag{2}$$

$$q(x)=q_0(x)-\delta\frac{\partial q_0(x)}{\partial x}+\frac{1}{2}\delta^2\frac{\partial q_0(x)}{\partial x^2} \tag{3}$$

$$\tau=au_0^2\left(1+\beta\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \tag{4}$$

$$q_0(x)=cu_0^{2n}\left(1+n\beta\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)=cu_0^m\left(1+\alpha\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \tag{5}$$

$$u_0=U+u_0' \quad (6) \qquad u_0^m=U^m+mU^{m-1}u_0' \quad (7)$$

$$u_0'=U\frac{h}{h-\eta}+U\cdot f(x,\eta) \tag{8}$$

$$u_0'=U\left(1+\frac{\eta}{h}+\frac{\eta^2}{h^2}\right)+U\cdot f(x,\eta) \tag{9}$$

$$\begin{aligned} q_0(x)&=c\left(U^m+U^{m-1}u_o'\right)\left(1+\alpha\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\\ &=\bar{q}\left(1+\alpha\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+m\frac{\bar{q}}{U}\left(1+\alpha\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)u_0' \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \eta}{\partial t}+\bar{q}\frac{m}{h}\left(1+2\frac{\eta}{h}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}+\bar{q}\left\{\alpha-m\frac{\delta}{h}\left(1+2\frac{\eta}{h}\right)\right\}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\\ &\quad+\bar{q}\left\{\frac{1}{2}\delta^2\frac{m}{h}\left(1+2\frac{\eta}{h}\right)-\alpha\delta\right\}\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}+\frac{1}{2}\alpha\delta^2\bar{q}\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4}=F(x) \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \eta'}{\partial t'}+m(1+2\eta')\frac{\partial \eta'}{\partial x'}+\left\{\alpha-m\frac{\delta}{h}(1+2\eta')\right\}\frac{\partial^2 \eta'}{\partial x'^2}\\ &\quad+\left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{\delta}{h}\right)^2(1+2\eta')-\alpha\left(\frac{\delta}{h}\right)\right\}\frac{\partial^3 \eta'}{\partial x'^3}+\frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\delta}{h}\right)^2\frac{\partial^4 \eta'}{\partial x'^4}=F(x') \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \eta'}{\partial t'}+m(1+2\eta')\frac{\partial \eta'}{\partial x'}+\left(\alpha-m\frac{\delta}{h}\right)\frac{\partial^2 \eta'}{\partial x'^2}\\ &\quad+\left\{\frac{1}{2}m\frac{\delta}{h}\left(\frac{\delta}{h}-\alpha\right)\right\}\frac{\partial^3 \eta'}{\partial x'^3}+\frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\delta}{h}\right)^2\frac{\partial^4 \eta'}{\partial x'^4}=F(x') \end{aligned} \tag{13}$$

キーワード ： 小規模河床波、遅れの距離、位相差、流砂量、ソリトン
連絡先 ：〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27　中央大学理工学部　TEL. 03-3817-1805　E-mail：jamesseo@civil.chuo-u.ac.jp

開水路流れにおいて自由水面に発生する定在波の影響である．(8)式をテイラー展開し，η/h に関して3次以上の項を無視すると(9)式を得る．平均流砂量を $\bar{q}=cU^m$ とし，(7)式を(5)式に代入すると，$q_0(x)$に関する(10)式を得る．式(10), (2), (3)を連続式(1)式に代入することにより，河床波を支配する基本式(11)式を得る．さらに，$\eta'=\eta/h$，$x'=x/h$，$t'=t\bar{q}/h^2$ で示される量を用いて無次元化すると(12)式を得る．(12)式は波形 η に関して非線形と成っており，この非線形性を考慮することは本研究の特徴である．また，移流項の非線形の項を残し，他の項に対しては η/h の2次以上のオーダーの影響が小さいと考え整理すると(13)式を得る．

３．発生波長と位相速度

波高の小さい河床波発生初期において，基本式(12)式の非線形項はすべて無視し得るオーダーとなる線形偏微分方程式(14)式とみなせ，初期波形を(15)式と仮定すると，分散関係式(16)式を得る．

$$\eta'_{t'}+A\eta'_{x'}+B\eta'_{x'x'}+C\eta'_{x'x'x'}+D\eta'_{x'x'x'x'}=0 \quad (14)$$

$$\eta'=\exp(ikx'+\sigma t') \quad (15)$$

$$\sigma=k^2B-k^4D-i(Ak-Ck^3) \quad (16)$$

このとき，最大成長率を示す k_{max} は $\mathrm{Re}[d\sigma/dk]=0$ を満たすものであり，$k_{\max}=\sqrt{B/2D}$ を得る．線形方程式の係数 $B=\alpha$，$D=0.5\alpha(\delta/h)$ により卓越波長は近似的に $L_{\max}=2\pi/k_{\max}=2\pi\delta$ とする．ここで，δ をステップ長とし，Einstein（1950）の理論[3]により粒径の100倍程の値を取ると，卓越波長 L_{max} は $600d$ となる．この値は従来，砂漣の一般的な発生波長とされてきた．

分散関係式(16)式より，発生する河床波の位相速度は $v_p=I_m[\sigma/k]$ と表せ，$v_p=A-Ck^2$ を得る．ここで，v_p：波の位相速度，σ：角速度，$A=m$, $C=0.5(\delta/h)^2-\alpha(\delta/h)$ である．河床波が生じるような値($\alpha=7.5$, $\delta/h=1$, $m=3$) を v_p に代入すると，$v_p=3+7k^2=3+7(2\pi/L)^2$ となり，波長の短い波ほど速く進むことが分かる．

４．数値解析

(1) 数値解析方法

本節では，2 節で導出して無次元基本式(12)を数値的に解析する．河床波の波長より十分に長い解析

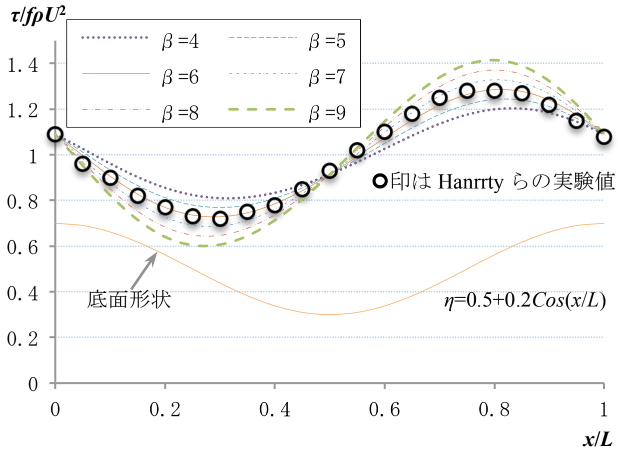

図-2 *Sin* 形状をした底面上でのせん断応力 τ と β の関係

区間の上下流端に同じ値を取る周期境界条件を用い，空間的には中心差分，時間的にはRunge-Kutta-Gill 法を用いて数値計算を行った．底面せん断応力と底面形状の位相差 α の関係表す(5)式により，掃流砂量の場合は $q\propto\tau^n$ の関係である．本研究では一般的に用いられている $n=3/2$[3]を採用する．図-2 に示すように，α の値は Hanrraty の研究を参考に，河床波近傍のせん断応力分布に対して(4)式を用いた．その結果，β は 5～7 が妥当と考え，α は 7.5～10.5 となる，(4)式は河床近傍のせん断応力縦断方向の分布が河床波の形状に対し，上流端へのずれを近似的に表せる．本研究では $\alpha=7.5$ を採用する．

(2) 計算結果

基本式(12), (13)式を用い，初期条件の波形として波高は 0.1, 波長は 5 の *Sin* カーブ($\eta'=0.1Sin\{(2\pi/5)x'\}$)を与え，図-3 に計算結果を示す．

1) δ/h による影響($m=3$, $\alpha=7.5$)

波高は遅れの距離 δ が大きいと低くなる．波長は遅れの距離に関わらず，一様である．これにより，遅れの距離 δ は河床波を抑止する効果を有する．

2) m による影響($\alpha=7.5$, $\delta/h=1$)

波高は m の値が大きいほど低くなる傾向にあるが，m の値が 3～5，6～7，9～10 では大きな変化はないことが分かった．

3) α による影響($\delta/h=1$, $m=3$)

波高は α の値が大きいほど，高くなる．波長は α の値に関わらず，一様である．また，α は河床波発生

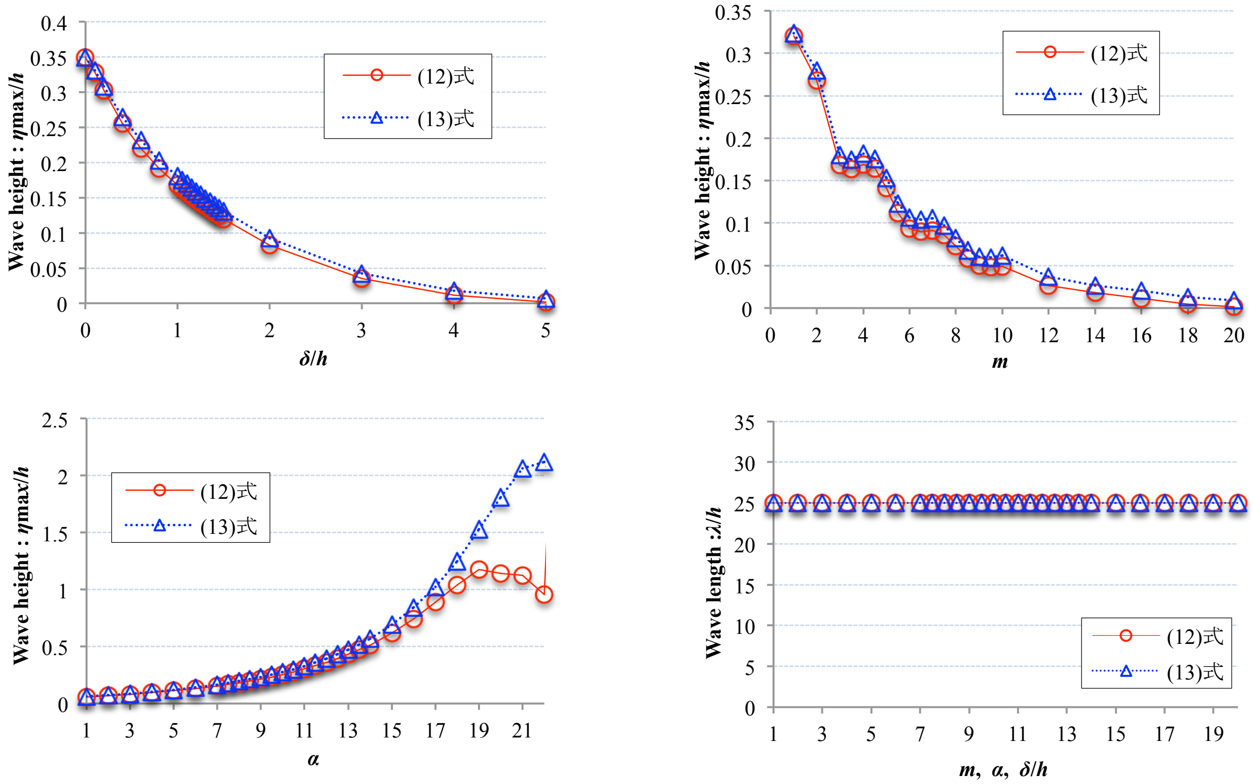

図-3 各パラメーター と波高・波長との関係

(密集している値は実験値から求めた範囲内の値ないし変化が予測される値)

時間と明確な関係性が見られ, α の値が大きいほど河床波の発生時間が早くなる.

4) 拡散項と分散項の非線形効果による影響

基本式(12)と移流の項以外の非線形項を無視し得る(13)式を比べると,ほぼ同一の結果を示しており,ただし, α は 19 より大きくなると、波高の差が激しくなっていくことが分かる.

5) 初期条件としての河床形状による影響

初期河床形状のみ異なる条件を与え,図-4 に示すように,(①) 初期河床は波長の短い波を与えた場合,河床形状は発達の前において平坦となり,その後砂漣が発生,成長することが確認された.一方,(②) 波長の長い波を与えた場合は河床形状の発達過程において平坦になることは見られなかった.

6) 定在波が河床波の発生発達に与える影響

基本式(12)式を用い，右辺の強制外力 $F(x')$ に定在波として振幅は 0.1, 波長は 100 を持ち，ステップ長より十分長い波長 *Sin curve* $F(x')=0.1 Sin\{(2\pi/100)(x'-0.1t)\}$ を与える．ここで，河床波の初期条件として $\eta'(x,t)=0$ の平坦状態とし，パラメーターは $\alpha=7.5$, $\delta/h=1$ の値を適用させ，計算結果を図-5 に示す．底面の波形は，強制外力に支配される．計算開始後，河床形状は定在波によって変化し，与

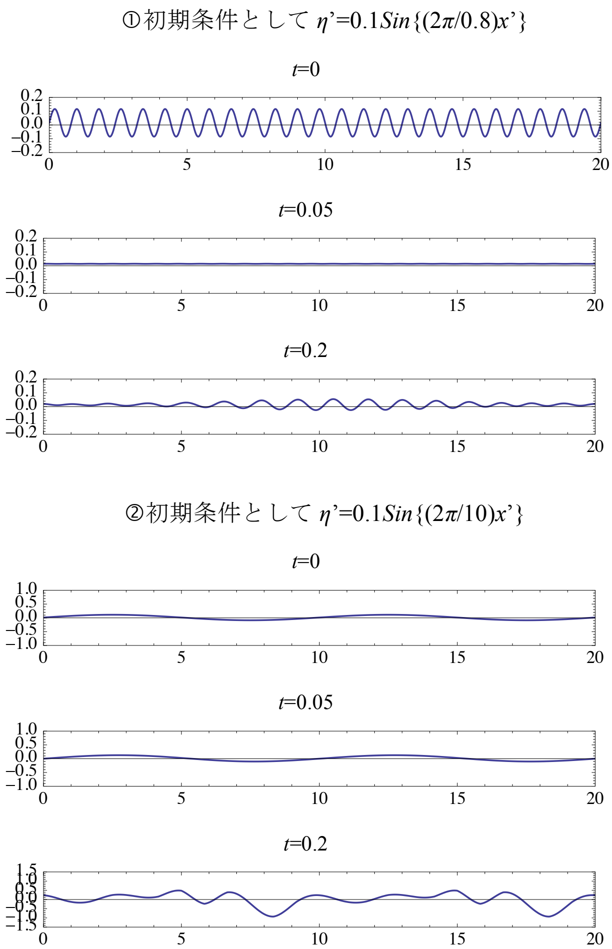

図-4 初期条件のよる河床形状の変化

えた $F(x')$と同じ波長を持つ河床波が形成され，前傾化して河床波が発生する．つまり，平坦状態の河床形状でも水面に存在する定在波の影響による強制的な河床形状ができる．また，定在波の振幅が小さいほど強制外力の影響は小さくなる．

7) 基本式の非線形性と分散性による影響

図-6 は，リップルの形成後，水面の定在波などの強制外力の影響を考え，基本式(12)式に初期河床形状として $\eta'=0.2Sin\{(2\pi/10)x'\}$ と強制外力の影響として $F(x')=0.01Sin\{(2\pi/100)(x'-0.1t)\}$ を与え,その結果，得られたソリトン解である．波形が進行しつつ衝突を繰り返すが，衝突・通過の後はもとの孤立波に戻る．(12)式の非線形性と分散性がバランスして形成される孤立波(ソリトン)が発生したと考えられる．また，与えた初期条件の振幅による孤立波の大きさが変わり，それによって波の速度が異なることが分かった．

5．まとめ

本研究では，小規模河床波の発生発達を支配する基本式を導出し，基本式の特性と初期値問題として数値解析より得られた知見を以下に示す．

(1) 河床波の発生において，底面せん断応力と河床形状の位相差 α は河床波発達の要因になっており，遅れ距離 δ は波形を抑止する効果を有している．

(2) 基本式が持つパラメーターに対して，様々な値を取ることができる．それによって多様な解が存在し，数値計算上，移動床流れにおいてソリトンの河床波の存在があり得ることが分かった．

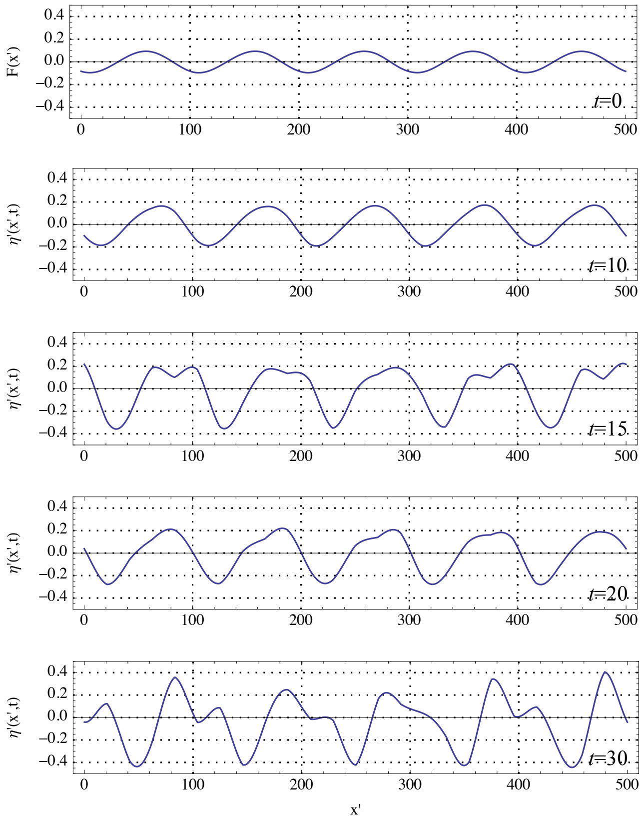

図-5 定在波が河床波に与える影響

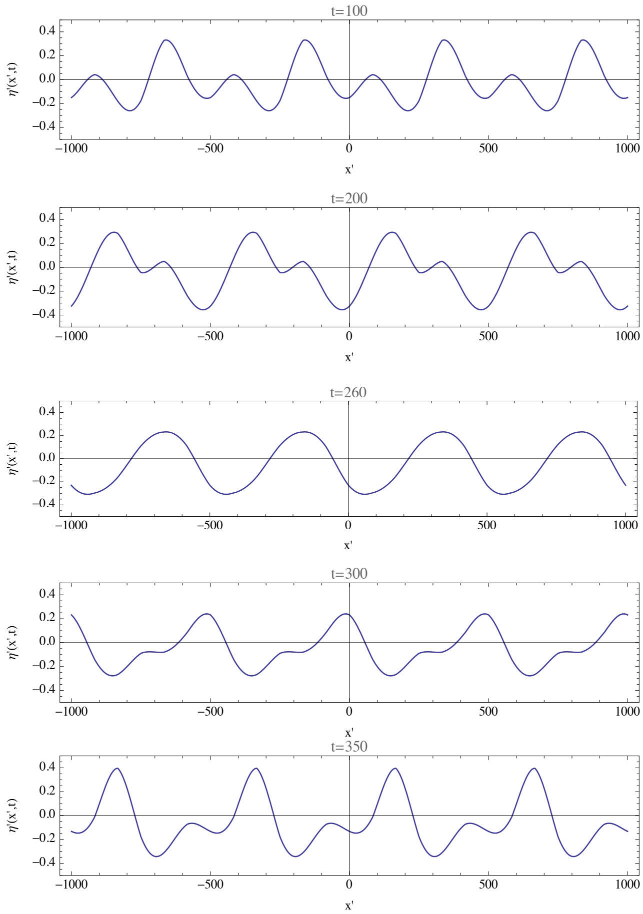

図-6 河床波のソリトン解

参考文献

1) 山田正，池内正幸，植松：小規模河床波の発生発達に関する研究，第 31 回水理講演論文集，pp.665-670, 1987.5.

2) 山田正，竹本典道：空気流によるサンドリップルの発生発達に関する研究，第 32 回水理講演論文集，pp.479-484, 1988. 2.

3) 林泰造,尾崎幸男,和泉雄：掃流砂量式と掃流砂量の遅れの距離について，第 25 回水理講演会論文集，pp.9-19, 19981.2.

4) Einstein,H.A.,:The Bed-Load function for Sediment Transportation in Open Channel Flow, USDA, Soil Conservation Service, Technical Bulletin,No.1026, pp.1-71, 1950.

4) Jonathan ABRAMS, THOMAS J.Hanratty : Relaxation effects observed for turbulent flow over a wavy surface, Fluid Mech, Vol.151, pp.443-455, 1985.4.

5) Kennedy, J. F. : The mechanics of dunes and anti-dunes in erodible-bed channels. J. Fluid Mech. Vol.16, 521–544, 1963.