

安定成層における山越え気流に関する研究

中央大学大学院 学生会員 ○王 婭 中央大学 フェロー会員 山田 正
中央大学大学院 学生会員 成岱蔚 中央大学 正会員 銭 潮潮

1. はじめに

山を持つ下部境界条件とする、大気の振る舞いは「山越え気流」と言われている。水などの流体が障害物を乗り越える時、障害物の高さ・流体層の深さ・流速の組み合わせによって、障害物の後面で増速した液面が上方に跳ね上がる場合がある。この現象は跳水 (hydraulic jump) 現象として広く知られている。単層流体の流れが障害物を越える場合の振舞については、Long^{1),2)}と Houghton et.al³⁾が浅水方程式系を用いた考察を行っている。彼らの結果（それぞれの型の流れの水面形）は Baines et.al⁴⁾によりまとめられ、統一的形式でフローレージムとして図に表されている。また、銭・山田⁵⁾も流れの基本式（連続式と Bernoulli の定理）から各種水面形の出現領域を導出している。しかし、普段よく使われている浅水流体モデルでは空気の影響を無視している。運動状態により分層されている運動空気層に対して、上層の静止空気層との密度差が陰微であるため、上層から受ける影響を考慮する必要がある。それに関して、Long は上下二層流体が同じ流速を持つという仮定を基づいて、流れの物理量の制約関係を導出しているが、理論的に各種山越え気流の存在領域は導出されていない。

本研究では、二層流における拡張した浅水流体モデルから、山越え気流のレージムを完全なものにし、ベル型の山を下部境界条件とする場合、気流の形状を数値計算で明らかにする。

2. 浅水流体モデルとフローレージム

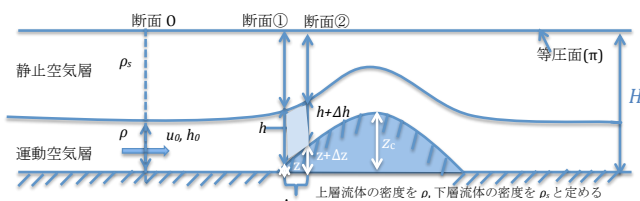


図-1 流れの概要と記号の定義

本研究で対象とする二層気流の流れの概要と記号は図-1と図-2に示されている。山に当たる気流は下層の運動空気層と上層の静止空気層で構成されている。

2.1 二層流における基礎式の導出

山越え気流は、私たちの生活に身近に関わっているが、どのような時にどのような流れになるか、イメージが湧きにくいのも事実である。これらの現象を統一的に理解したいところであるが、難解になってしま

う。このような時、より単純化されたモデルを用いると見通しが良くなる。そこで浅水流体モデルが広く使われている。

$$\text{連続式} \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad [I]$$

$$\text{運動量方程式} \quad \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial uq}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} + gh \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

以上の示すように浅水流体モデルで必要になる式は連続式と運動量方程式の二つのみである。運動量方程式は、流体の上部境界面が等圧及び等圧と近似できる時に成り立つ。従って、上の式は図-1に示す静止空気層に適用できるが、下層の運動空気層に適用できない。下層気流の運動を解明するため、上の浅水流体モデルを拡張した。

モデルを構築するため、以下に示す四つの仮定をした。

(a) 上層空気層の上境界面は固定されている等圧面(π)と仮定する。つまり、図-1に示すように二つの空気層の厚さは定数 H である。

(b) 静水圧と仮定する。

(c) 密度が一定と仮定する。

(d) 運動空気層の下部境界面に働く摩擦力が無視できると仮定する。

[I]の連続式これらの仮定を下としても成立する。は相変わらず成り立つ。次に運動量方程式について考える。Newton's second Law によれば微小区間 Δx の運動空気柱を対象にして考えると、次の式が成り立つ。

$$m \frac{du(x,t)}{dt} = F_{\text{external}} \quad (1)$$

(1)式の左辺及び右辺は、

$$\text{左辺} = m \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \right) = \rho h \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$\text{右辺} = F_1 + F_2 + F_3$$

となる。

ここに、 F_1 は①②断面に働く圧力の差、 F_2 は重力が流線に沿う分量、 F_3 は静止空気柱が下層に働く圧力の流線に沿う分量である。

二次 order の微小項を省略し、 $\Delta h = \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x$ 、 $\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x$ を代入すると、次の式が得られる。

キーワード 大気科学、水理学、山越え気流、数値計算、Lax-Wendroff

連絡先 〒112-8551 東京都文京区春 1-13-27 中央大学後楽園キャンパス TEL. 03-3817-1805 E-mail : wangya@civil.chuo-u.ac.jp

$$\begin{aligned}
F_1 &= \int_z^{h+z} (\pi + \rho_s g(H-h-z) + \rho g(h+z-y)) dy - \\
&\quad \int_{z+\Delta z}^{h+\Delta h+z+\Delta z} \left(\pi + \rho_s g(H-(h+\Delta h)-(z+\Delta z)) + \right. \\
&\quad \left. \rho g(h+\Delta h+z+\Delta z-y) \right) dy \\
&= \rho g h \Delta x \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{2\rho_s}{\rho} + \frac{\rho_s z}{\rho h} - \frac{\rho_s H}{\rho h} - 1 \right) + \rho_s g h \Delta x \frac{\partial z}{\partial x} - \pi \Delta x \frac{\partial h}{\partial x} \\
F_2 &= -\rho g h \Delta x \frac{\partial z}{\partial x} \\
F_3 &= (\pi + \rho_s g(H-h-z)) \Delta x \frac{\partial h}{\partial x}
\end{aligned}$$

これらの式を(1)に代入し,変形すると,運動量方程式が得られる. 従って下層に应用できる拡張した浅水流体モデルでは[II]になる.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial uq}{\partial x} + \frac{\Delta\rho}{\rho} gh \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\Delta\rho}{\rho} gh \frac{\partial z}{\partial x} &= 0
\end{aligned} \quad \text{[II]}$$

上式は二層流における基礎式であるが, $\Delta\rho/\rho=1$ になる時,一層流における浅水流体モデルになる.

2.2 山越え気流のレジームの導出

定常状態を考えると(即ち単位幅流量 q は時間的に一定とする),[II]から連続式と Bernoulli の定理が得られる.

$$uh = \text{const.} \quad (3)$$

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{\Delta\rho}{\rho} h + \frac{\Delta\rho}{\rho} z + \frac{\rho_s H}{\rho} = \text{const.} \quad (4)$$

図-1 に示すような山越え気流において断面 O の空気層の内部フルード数 $Fr_0' = u_0 / \sqrt{\Delta\rho g h_0 / \rho}$, $\Delta\rho = \rho - \rho_s$ と断面 O の空気層の厚さ h_0 で無次元した山の高さ $\eta = z_c/h_0$ の関係式を導出する. (3),(4)式から次の式が成り立つ.

$$u_0 h_0 = uh = K_1 \quad (5)$$

$$\frac{u_0^2}{2g} + \frac{\Delta\rho}{\rho} h_0 + \frac{\rho_s H}{\rho} = \frac{u_c^2}{2g} + \frac{\Delta\rho}{\rho} h_c + \frac{\Delta\rho}{\rho} z_c + \frac{\rho_s H}{\rho} = K_2 \quad (6)$$

(5),(6)式より u を消去し整理することにより(7)式の3次方程式が得られる.ここに, $h_* = h_c/h_0$ は流入側の空気層の厚さ h_0 で無次元した任意断面の水深である.

$$h_*^3 - \left\{ 1 + \frac{1}{2} Fr_0'^2 - \eta \right\} h_*^2 + \frac{1}{2} Fr_0'^2 = 0 \quad (7)$$

Cardano の解法により,(7)式を解くと,跳水・段波が発生しない限界条件は次式で表せる.

$$\eta_{\max} = 1 + \frac{1}{2} Fr_0'^2 - \frac{3}{2} Fr_0'^{2/3} \quad (8^*)$$

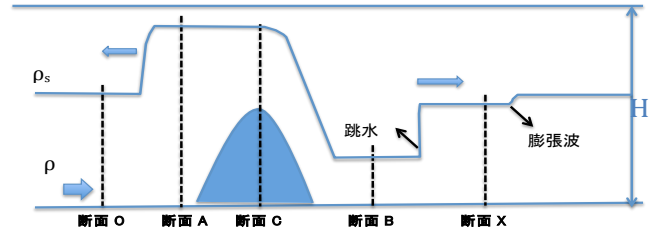


図-2 段波が起きる山越え気流

次は図-2 に示すような段波・跳水が起きる状態を考えてみよう. 段波の移動速度を c_l (山の前面), c_r (山の背面) で表す. 山の前面では,段波の移動速度 c_l が 0 と等しくない時に,流入側からの気流が全て乗り越えない,そういう時の連続式から(9)式になる.

$$(u_0 - c_l)h_0 = (u_A - c_l)h_A \quad (9)$$

O, A 二断面の単位時間あたりの単位幅の運動量 (ΔM) の増加は連続式を用い,変形すると,次の式になる.

$$\begin{aligned}
\Delta M / \Delta t &= \rho h_0 (u_0 - c_l)^2 - \rho h_A (u_A - c_l)^2 \\
&= \rho h_0 (u_0 - c_l)^2 \frac{h_A - h_0}{h_A}
\end{aligned} \quad (10)$$

一方, この部分に働く力は O, A 断面の圧力及び上層気流が下層気流の凸部に働く作用になる. 水圧分布を静水圧分布として,単位幅に働く圧力の差(F)は

$$\begin{aligned}
F &= \int_0^{h_A} \left(\rho_s g(H-h_A) \right) dy - \int_0^{h_0} \left(\rho_s g(H-h_0) \right) dy - \int_{h_0}^{h_A} \left(\pi + \rho_s g(H-y) \right) dy \\
&= \Delta\rho g (h_A - h_0) \frac{(h_A + h_0)}{2}
\end{aligned} \quad (11)$$

(10)=(11)により,山の前面における段波の移動速度が(12)式で表せる.

$$c_l = u_0 - \sqrt{\frac{\Delta\rho g (h_A + h_0) h_A}{\rho}} \quad (12)$$

ここで二層流体における下部運動空気層に対して,比エネルギーは次式で表される.

$$E = \frac{u^2}{2g} + h + \frac{\rho_s g(H-h)}{\rho g}$$

u, h は任意点におけるそれぞれの風速と空気層の厚さである.運動気流に対して, E の h に関する一階偏微分を 0 にすると,限界水深に対応する空気層の厚

さ h_c に対して(13)式が得られる.

$$Fr'_c = \frac{u_c}{\sqrt{(\Delta\rho/\rho)gh_c}} = 1 \quad (13)$$

O,A 断面の間に跳水現象が起きてないため,(3),(4)式を適用すると,(14),(15)式が得られる.

$$u_A h_A = u_c h_c = K_3 \quad (14)$$

$$\frac{u_A^2}{2g} + \frac{\Delta\rho}{\rho} h_A + \frac{\rho_s H}{\rho} = \frac{u_c^2}{2g} + \frac{\Delta\rho}{\rho} h_c + \frac{\Delta\rho}{\rho} z_c + \frac{\rho_s H}{\rho} = K_4 \quad (15)$$

以上より,(9),(12),(13),(14),(15) 式で u_A, h_A, u_c, h_c, c_l の五つの未知数が求められる. 特に, $c_l = 0$ の時,これらの式により発生した段波が静止跳水として停留する条件が次の式で表せる.

$$\eta = \frac{(1+8Fr_0'^2)^{3/2}+1}{16Fr_0'^2} - \frac{1}{4} - \frac{3}{2}Fr_0'^{2/3} \quad (16^*)$$

さらに,気流が完全に阻まれ, $u_A = 0, h_A = z_c$ の場合,これを(9),(12)式に代入すると,次の式を得る.

$$\frac{u_0 h_0}{h_0 - z_c} = u_0 - \sqrt{\frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{g(z_c + h_0)z_c}{2h_0}}$$

書き換えると,流入側からの流れが山を乗り越えられない限界条件が(17*)式で表せる.

$$Fr_0' = \left(\frac{\eta-1}{\eta}\right) \sqrt{\eta \left(\frac{1+\eta}{2}\right)} \quad (17^*)$$

B,C 断面において以下に示す連続式(18)と Bernoulli の定理(19)により u_B, h_B が求められる.

$$u_B h_B = K_3 \quad (18)$$

$$\frac{u_B^2}{2g} + \frac{\Delta\rho}{\rho} h_B + \frac{\rho_s H}{\rho} = K_4 \quad (19)$$

また,山の前面に生じる段波の導出過程と同様に山の背面に生じる段波 c_r の移動速度は次の式で表せる.

$$(u_B - c_r)h_B = (u_x - c_r)h_x \quad (20)$$

$$c_r = u_B - \sqrt{\frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{g(h_B + h_x)h_x}{2h_B}} \quad (21)$$

膨張波に対して次の式が成り立つ.

$$u_x - 2\sqrt{gh_x} = u_0 - 2\sqrt{gh_0} \quad (22)$$

(18)~(22)式の 五つの式で 五つの未知数(u_B, h_B, u_x, h_x, c_r)が求められる. また背面の段波の移動速度 c_r

が停止する条件($c_r = 0$)も得られる.

以上のように導出した(8*), (16*), (17*)式を用いることで,各種山越え気流の存在領域を図-3のように示すことができる.

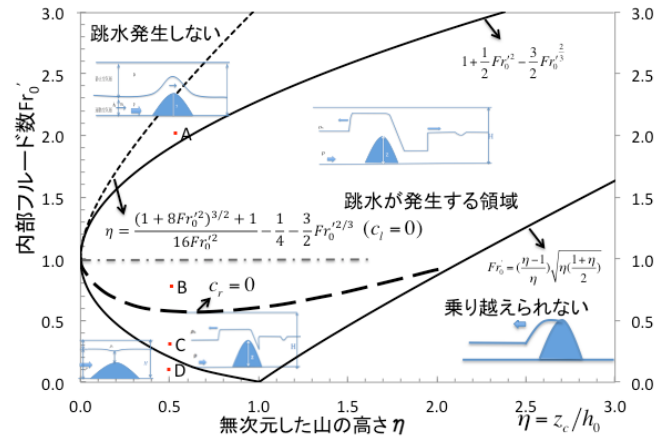


図-3 二層流における山越え気流のレジーム図

3. 数値計算

気流形状を明らかにするため,Newton's second Law から導出した二層流にも応用できる浅水流体モデルを用い,数値計算を行った. 本研究に用いる差分法は Lax-wendroff 法である. 空間と時間についていずれも 2 次精度の解法である.

[II]の式を書き換えると,次の式になる.

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial G(W)}{\partial x} + K = 0 \quad (23)$$

ここに,

$$W = \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \frac{q^2}{h} + g \frac{h^2}{2} \frac{\Delta\rho}{\rho} \\ q \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} \frac{\Delta\rho}{\rho} gh \frac{\partial z}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$q = uh$ である.

(23)式を用い,Taylor 展開により二次 order まで差分近似すると,

$$W(x, t + \Delta t) = W(x, t) + \Delta t \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + o(\Delta t^3)$$

$$W(x, t + \Delta t) \approx W(x, t) - \Delta t \left(\frac{\partial G}{\partial x} + K \right) + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \left\{ A \left(\frac{\partial G}{\partial x} + K \right) - \frac{\partial K}{\partial t} \right\}$$

になる. ここに

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2q}{h}, \frac{\Delta\rho}{\rho} (gh - \frac{q^2}{h^2}) \\ 1, 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial K}{\partial t} = \begin{pmatrix} -g \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

である. 差分スキームは次の示す通りである.

$$W_j^{l+1} = W_j^l - \lambda [\Delta' G_j^l + K_j^l] + \frac{\lambda^2}{2} [\bar{A}_{j+1/2}^l \{\Delta G_{j+1/2}^l + K_{j+1/2}^l\} - \bar{A}_{j-1/2}^l \{\Delta G_{j-1/2}^l + K_{j-1/2}^l\} + Q_j^l]$$

ここに $x = j\Delta x, t = l\Delta t, \lambda = \Delta t / \Delta x$

$$\Delta_{j+1/2}^l = \left(\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_{j+1} - \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_j \right), \quad \Delta_j^l = \frac{1}{2} \left\{ \left(\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_{j+1} - \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_j \right) \right\}$$

$$\left(\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_{j+1/2} \right)^l = \frac{1}{2} \left\{ \left(\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_{j+1} + \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_j \right) \right\}, \quad \left(\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_{j-1/2} \right)^l = \frac{1}{2} \left\{ \left(\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_j + \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_{j-1} \right) \right\}$$

$$K_j^l = \begin{pmatrix} \frac{\Delta\rho}{\rho} g h_j^l \cdot \Delta' z_j^l \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_{j+1/2}^l = \begin{pmatrix} \frac{\Delta\rho}{\rho} g \bar{h}_{j+1/2}^l \cdot \Delta' z_{j+1/2}^l \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$K_{j-1/2}^l = \begin{pmatrix} \frac{\Delta\rho}{\rho} g \bar{h}_{j-1/2}^l \cdot \Delta' z_{j-1/2}^l \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q_j^l = \begin{pmatrix} \frac{\Delta\rho}{\rho} g \Delta' q_j^l \cdot \Delta' z_j^l \\ 0 \end{pmatrix}$$

である.

障害物(山の形)は次のような形に設定した.

$$z(x) = \begin{cases} Zc(1 - (x - \frac{L}{2})^2 / a^2) & 0 \leq \left| x - \frac{L}{2} \right| \leq a \\ 0 & a < \left| x - \frac{L}{2} \right| \end{cases}$$

ここに

境界条件: $u(0, t) = u(L, t), h(0, t) = h(L, t)$

初期条件: $u(x, 0) = u_0, h(x, 0) = h_0 - z(x)$

である. 図-3 に示すような A, B, C, D の 4 case の計算例を行った. 下層気流に対し, それぞれの振り舞いが図-4 に示すような形状となった. 図-4 により, 行った計算実例と理論上で推定したフローレジームと一致することが分かる. ある高さの山に対して流速が小さい時と大きい時にのみ定常状態(caseA & caseD)が存在する. その中間の状態には上流に伝わる段波と下流に伝わる段波を伴う非定常な流れ(caseB & caseC)となる.

4. まとめ

連続式と Bernoulli の定理及び運動量方程式から, 障害物に当たる気流のフローレジームを導出した,

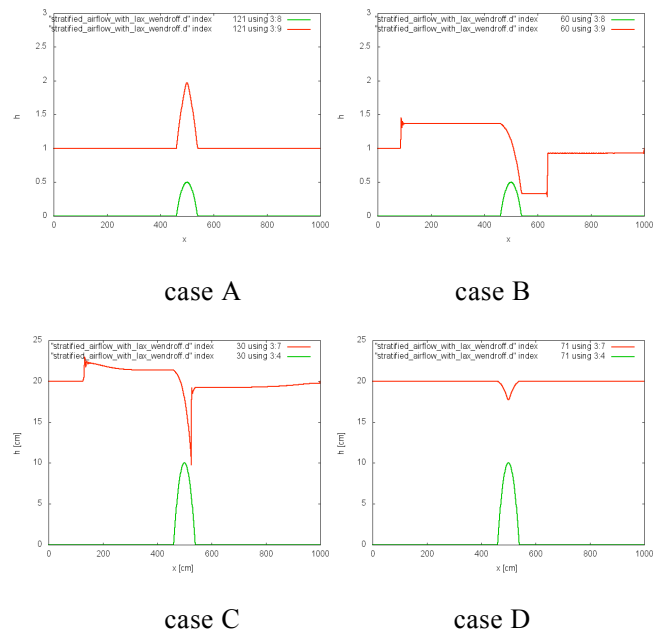


図-4 $\Delta\rho/\rho = 0.1$ の時下層気流の形状

それにより各種気流形状の存在する領域が, 流入側の空気層の厚さ h_0 で無次元した山の高さ $\eta = z_c/h_0$ と流入側の内部フルード数 $Fr_0' = u_0/\sqrt{\Delta\rho g h_0/\rho}$, $\Delta\rho = \rho - \rho_s$ で決まることが示される. さらに, Newton's second Law から導出した二層流にも応用できる浅水流体モデルを用い, 数値計算で各領域に存在する気流の形状を再現した. 本研究で行った計算例が理論上に示される形状と一致することを示した. 具体的には流速が小さい時と大きい時にのみ定常状態(caseA & caseD)が存在する. その中間の状態には上流に伝わる段波と下流に伝わる段波を伴う非定常な流れ(caseB & caseC)となる.

参考文献

- 1) Long, R.R.: Some aspects of the flow of stratified fluids. I. A theoretical investigation. Tellus 5, pp.42-58, 1953.
- 2) Long, R.R.: Some aspects of the flow of stratified fluids, II. Experiments with a two-fluid system. Tellus 6, pp.97-115, 1954.
- 3) Houtong, D.D., Kasahara, A.: Non-linear shallow fluid over an isolated ridge, Commun. Pure Appl. Math. 21, pp.1-23, 1968.
- 4) Braines, P.G., Davies, P.A.: Laboratory studies of topographic effects in rotating and/or stratified fluids. In Orographic Effects in Planetary Flows, GARP Publ. No. 23, pp.233-99. Geneva: WMO/ICSU, 1980.
- 5) 銭潮潮, 山田正: 開水路断面の不均一性に起因する不等流の水面形形成に関する基礎研究, 水利科学 N0.336, 65-99, 2014