

確率過程論を導入した流出解析における不確実性の評価に関する基礎的研究

中央大学理工学部 学生会員 ○小石 一字
中央大学大学院 学生会員 吉見 和紘
中央大学 フェロー会員 山田 正

1. はじめに

近年の X バンド MP レーダ網の発達に伴って、降雨の時空間分布は、従来に比べてより詳細に捉えられるようになった。しかし、観測の精度をいくら上げても降雨の時空間分布の物理的な不確実性は常に存在している。また、レーダ雨量と地上雨量の両者の観測値はどちらも事実だが、どちらが真値かは正確には分らない。したがって、真値の不確実さも常に存在していると言える。これらは降雨の時空間分布に起因する不確実性である。

本研究では、降雨の不確実性に注目し、広く河川計画に用いられている貯留型の流出解析手法を確率微分方程式によって記述できることを示した上で、降雨流出の確率微分方程式を繰り返し計算し、解の確率分布とインプットとして与えた降雨の不確実性との関係を調べた。

2. 決定論的流出計算手法

単一斜面における降雨流出の一般化した基礎式は、山田ら¹⁾によって提案されている。広幅矩形断面を想定した単一斜面において、連続式(1)式と断面平均流速が水深のべき乗に比例する形式の一般化された運動則(2)式を用いる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r(t) \quad (1)$$

$$v = \alpha h^m, \quad q = vh = \alpha h^{m+1} \quad (2)$$

ここに、 v : 断面平均流速[mm/h], h : 湛水深[mm], q : 単位幅流量[mm²/h], $r(t)$: 有効降雨強度[mm/h], α, m は流域特性を表すパラメータである。直接流出は流出寄与域(河道及び河道近傍の湿潤領域)からのみと考えると、斜面長は実地形上の斜面長より十分短いと考えられ、(3)式に示す変数分離形の近似式が仮定できる。

$$q(x, t) \cong xq_*(t) \quad (3)$$

ここに、 q_* : 流出高[mm/h]である。(1)(2)式と、斜面長 L の末端で考え $x = L$ とした(3)式から、流出高に関する常微分方程式が得られる。

$$\frac{dq_*}{dt} = (m+1) \left(\frac{\alpha}{L} \right)^{\frac{1}{m+1}} q_*^{\frac{1}{m+1}} (r(t) - q_*) \quad (4)$$

ここに、 L : 流出寄与域斜面長である。また、簡単のため以下のようにパラメータを設定すると、

$$a_0 = (m+1) \left(\frac{\alpha}{L} \right)^{\frac{1}{m+1}} \quad (5), \quad \beta = \frac{m}{m+1} \quad (6)$$

以下の(7)式が一般化された単一斜面からの降雨流出の基礎式である。

$$\frac{dq_*}{dt} = a_0 q_*^\beta (r(t) - q_*) \quad (7)$$

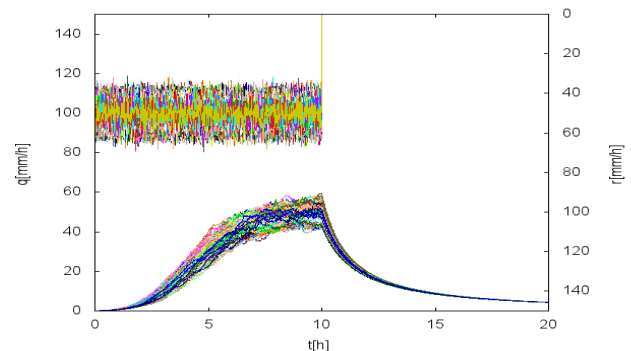


図-1 10000 回試行したときの確率微分方程式形の流出式の解。(入力降雨の平均 $r_0=50\text{mm/h}$, 入力降雨の偏差 $\sigma=4\text{mm/h}$)

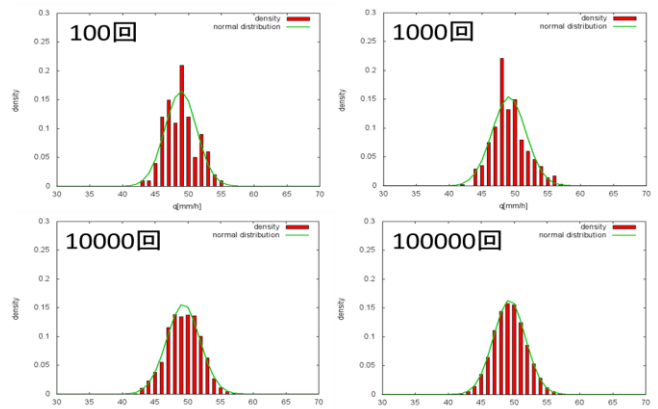


図-2 10 時間経過したときの 100 回, 1000 回, 10000 回, 100000 回の試行回数に対する (12) 式の解の存在確率のヒストグラムと、その平均、標準偏差を有する正規分布

表-1 試行回数 10000 回のときのそれぞれの入力降雨の平均値、偏差に対する流出高の平均と標準偏差

入力降雨の平均, 標準偏差	平均[mm/h]	標準偏差[mm/h]
$r_0=30\text{mm/h}, \sigma=1\text{mm/h}$	29.65	0.48
$r_0=30\text{mm/h}, \sigma=2\text{mm/h}$	29.68	0.96
$r_0=30\text{mm/h}, \sigma=3\text{mm/h}$	29.61	1.48
$r_0=30\text{mm/h}, \sigma=4\text{mm/h}$	29.66	1.97
$r_0=50\text{mm/h}, \sigma=1\text{mm/h}$	49.29	0.62
$r_0=50\text{mm/h}, \sigma=2\text{mm/h}$	49.36	1.22
$r_0=50\text{mm/h}, \sigma=3\text{mm/h}$	49.44	1.75
$r_0=50\text{mm/h}, \sigma=4\text{mm/h}$	49.24	2.52
$r_0=100\text{mm/h}, \sigma=1\text{mm/h}$	99.94	0.89
$r_0=100\text{mm/h}, \sigma=2\text{mm/h}$	99.97	1.62
$r_0=100\text{mm/h}, \sigma=3\text{mm/h}$	99.89	2.27
$r_0=100\text{mm/h}, \sigma=4\text{mm/h}$	99.98	3.24

また、土壌・地形特性を示す流出パラメータ α と β の値に関しては志村ら²⁾によって理論的に決定されることが示されている。

キーワード 不確実性, 降雨流出過程, 確率微分方程式

連絡先 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学 理工学部 TEL03-3817-1805

3. 確率微分方程式と流出基礎式の関係

確率微分方程式とは決定論的な項と確率論的な項を含み、その解も確率過程となる微分方程式であり、古くは19世紀末のブラウン運動の発見に端を発している。次式に示すように一次元空間において、時系列 $x(t)$ の微小変化量 $dx(t)$ の挙動が、ドリフト項(決定論的な項)と拡散項(確率論的な項)で以下の形式で表される式を、伊藤の確率微分方程式という。

$$dx(t) = g(x(t), t)dt + h(x(t), t)dw(t) \quad (8)$$

ここに、 $g(x(t), t)$, $h(x(t), t)$ は時系列 $x(t)$ と時間 t の任意の関数である。また、 $dw(t)$ は平均 0、標準偏差 $\sqrt{dt}$ の正規分布に従う Wiener 過程 $w(t)$ の微小変化量である。上式は差分形式で表現されているため、 dt の大きさに任意性がある。

(7)式は、流出高 q_* に関する一階の常微分方程式であり、

$$dq_* = a_0 q_*^\beta (r(t) - q_*)dt \quad (9)$$

として差分形式で表現できる。ここで、入力として与える有効降雨強度 $r(t)$ が、各時刻において、ある平均値とその平均値周りに分布しているとして、

$$r(t) = \bar{r}(t) + r'(t) \quad (10)$$

で与えられるとすると、(9)式は、

$$dq_* = a_0 q_*^\beta (\bar{r}(t) - q_*)dt + a_0 q_*^\beta r'(t)dt \quad (11)$$

となる。ここで、Wiener 過程 $w(t)$ の微小変化量 $dw(t)$ を用いると (11)式は、

$$dq_* = a_0 q_*^\beta (\bar{r}(t) - q_*)dt + a_0 q_*^\beta \sqrt{D}dw(t) \quad (12)$$

となる。ここで、 D : 拡散係数[mm²/h]は次式によって表される。

$$D = \sigma^2 \cdot T_L \quad (13)$$

ここに、 σ : 入力降雨の標準偏差[mm/h], T_L : 乱流の乱れ場の時間スケールを示す指標であり、G.I.Taylor の拡散理論に起因する³⁾。(12)式は(8)式に示した伊藤の確率微分方程式と全く同型であり、右辺第一項が決定論的な項、第二項が確率論的な項である。このように、伊藤の確率微分方程式から、ある不確実性を有する降雨に関する流出高 q_* の挙動を求める事ができる。(12)式は山田ら⁴⁾によって導かれた確率微分方程式形の降雨流出の式である。

4. 降雨流出過程の確率微分方程式から得られる流出高の非定常確率分布

本研究では、(12)式を榊原ら⁵⁾によって提案された確率微分方程式を解くための4次のルンゲ・クッタ法で数値的に解き、数値計算の試行回数を10回から100,000回まで段階的に増やしていった。そこで、各試行回数に応じた解のヒストグラムを出し、その平均、分散、標準偏差を有する正規分布と比較した。また、それぞれの入力降雨の平均値、偏差によってどのように変化するかを検証した。(12)式のパラメータは、流出パラメータ a_0 , β 及び降雨の平均値、標準偏差で構成されるが、流出パラメータは一定値を与え、入力降雨の平均値、標準偏差及び計算の繰り返し回数の三項目につ

いて検証する。

図-1は、試行回数10000回のときの(12)式の解である。図に示すように、経過時間にとまって方程式の解の存在範囲が拡散していることがわかる。また、決定論的な(7)式の解が定常状態に達したとき、(12)式の解の存在範囲も定常状態になることが数値計算の結果から分かった。

図-2は、100回、1000回、10000回、100000回の試行回数に対する10時間経過したときの(12)式の解の存在確率のヒストグラムと、その平均、分散、標準偏差を有する正規分布を示しており、表-1は、試行回数10000回のときのそれぞれの入力降雨の平均値、偏差に対する流出高の平均と標準偏差を示している。図-2に示すように、試行回数を増やすにつれてヒストグラムが正規分布に漸近していることが分かる。また、表-1からは、入力降雨の降雨強度が強ければ強いほど降雨に対する流出高の不確実性が大きくなり、入力降雨の偏差が大きいほど流出高の標準偏差が大きくなることが分かる。

また、数値計算に用いる時間の刻み幅 dt を大きくすると、流出高の確率分布の標準偏差は微小量増加することが分かった。

5. 結論

本研究では確率微分方程式形の降雨流出の式の解の存在確率分布とインプットとして与えた降雨の不確実性との関係を調べた。得られた知見を以下にまとめる。

- 1) 経過時間が大きくなるにつれて流出高の存在確率分布が広がるが、決定論的な解が定常状態になると流出高の存在確率分布も定常状態になる。
 - 2) 入力降雨の平均値、標準偏差が大きければ大きいほど、不確実性を有する流出高の平均値、標準偏差が大きくなる。
 - 3) 数値計算に用いる時間の刻み幅 dt を大きくすれば流出高の確率分布の標準偏差は微小量大きくなる。
- 今後の展望としては、伊藤の確率微分方程式と数学的に全く等価な確率密度関数の運動を記述する Fokker-Planck 方程式と本研究で求めた確率分布との比較をし、また、確率微分方程式形の降雨流出の式の拡散項の拡散係数を雨の粒径分布から理論的に求めるつもりである。

参考文献

- 1) 山田正：山地流出の非線形性に関する研究，水工学論文集，第47巻，pp.259-264, 2003
- 2) 志村光一，大原憲明，松本浩志，山田正：水理計算に基づく大規模河川網の洪水流出特性に関する研究，水文・水資源学会誌，Vol.14, No.3
- 3) 日野幹雄：『流体力学』，朝倉書店，pp417-425, 1992
- 4) 吉見和紘，山田正，山田朋人：確率微分方程式の導入による降雨流出過程における降雨の不確実性の評価，水工学論文集 第59巻，2015
- 5) 榊原道夫，仁木滉，日吉由美：確率微分方程式のルンゲ・クッタ解(I)，情報処理学会第33回全国大会，pp1863-1864, 1986