

## 降雨の不確実性による流出の不確実性に関する研究

中央大学大学院 学生会員

○田 洋

中央大学大学院 学生会員

吉見 和紘

中央大学理工学部 フェロー会員

山田 正

### 1. はじめに

近年、地球温暖化に伴い、異常降水事象がよく発生している。氾濫危険水位を越えるような河川増水も多く発生し、流量や水位予測が非常に重要である。降水から流出量を算出する場合、一般的に流出解析を行うが、流出過程を再現するにあたり、降雨、降雨流出モデル、初期値及び観測誤差等による多くの不確実性が生じている。

本研究では、特に降雨の不確実性が及ぼす流出の不確実性に注目し、不確実性理論を降雨流出過程へ応用し、流出の不確実性を定量的に解析することを目的としている。

### 2. 降雨流出過程

山地における降雨流出過程は図-1で表す。山田<sup>1)</sup>は単一斜面における一般化した降雨流出の基礎式を提案している。連続式に関しては式(2-1)で表現される。単一斜面に対して幅広矩形断面を想定するとともに、様々な流出形態に対応するため運動則を式(2-2)に示すよう、断面平均流速は水深のべき乗に比例する。式(2-1)と式(2-2)より単位幅流量 $q$ についての式(2-3)を得る。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r(t) \quad (2-1)$$

$$v = ah^m, q = vh = ah^{m+1} \quad (2-2)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = (m+1)(\alpha)^{\frac{1}{m+1}}(q)^{\frac{m}{m+1}}(r(t) - \frac{\partial q}{\partial x}) \quad (2-3)$$

ここに、 $v$ : 断面平均流速[mm/h],  $h$ : 湛水深[mm],  $q$ : 単位幅流量[mm<sup>2</sup>/h],  $r(t)$ : 降雨強度[mm/h],  $\alpha, m$ は流域特性を表すパラメータである。

直接流出は流出寄与域のみからの流出と考えると、斜面長は実地形上の斜面長より十分短いものと考えられ、式(2-4)に示す変数分離形の近似式が仮定できる。

$$q(x, t) \cong xq_*(t) \quad (2-4)$$

ここに、 $q_*$ : 流出高[mm/h]である。また、斜面長 $L$ の末端で考え $x=L$ として式(2-4)を用いると、偏微分方程式である式(2-3)は式(2-5)に示すように流出高に関する常微分方程式に変形できる。

$$\frac{dq_*}{dt} = (m+1)(\alpha)^{\frac{1}{m+1}}q_*^{\frac{m}{m+1}}(r(t) - q_*) \quad (2-5)$$

ここに、 $L$ : 流出寄与域斜面長[mm]である。

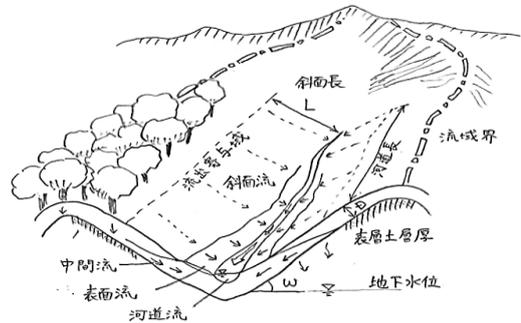


図-1 山地小流域谷頭部における降雨流出機構図

ここで

$$a = (m+1)(\alpha)^{\frac{1}{m+1}}, b = \frac{m}{m+1} \quad (2-6)$$

とすると、式(2-5)は式(2-7)に変形する。

$$\frac{dq_*}{dt} = aq_*^b(r - q_*) \quad (2-7)$$

式(2-7)が単一斜面からの降雨流出の基礎式となる。

### 3. 不確実性理論

一次元空間において1個の粒子の位置についてマルコフ性を仮定すると、この粒子の空間座標 $x$ は $dt$ を微小時間増分として

$$x(t + dt) = x(t) + dx(t) \quad (3-1)$$

と表せる。式(3-1)の右辺第2項は

$$dx(t) = g(x(t))dt + \sigma(x(t))dw(t) \quad (3-2)$$

と定義される。 $g(x(t))$ はドリフト係数、 $\sigma(x(t))$ は拡散係数とよばれ、確率過程 $w(t)$ はBrown運動である。式(3-2)は伊藤の確率微分方程式<sup>2)</sup>である。伊藤の確率微分方程式の解 $x(t)$ の任意時刻における存在確率密度関数 $p(x, t)$ はFokker-Planck方程式<sup>3)</sup>

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial (g(x, t)p(x, t))}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\sigma^2(x, t)p(x, t))}{\partial x^2} \quad (3-3)$$

を満たす。

### 4. 不確実性理論を降雨流出過程への導入

降雨は式(4-1)を示すように降雨の平均と降雨の偏差との和で以下のように表す。

$$r(t) = \bar{r}(t) + r'(t) \quad (4-1)$$

式(4-1)を式(2-7)に代入し、変形すると、

$$dq_* = aq_*^b(\bar{r} - q_*)dt + aq_*^b r' dt \quad (4-2)$$

ここで、降雨の偏差 $r'$ をWinner過程 $w(t)$ で表現したら、 $r' dt$ は $\sqrt{D}dw(t)$ に置き換えることができる。ただし、 $D$ は拡散係数であり、G.I.Taylorの拡散理論<sup>4)</sup>によれば、

$D=\sigma^2 T_L$ . また,  $T_L$  は降雨の乱れを表す時間スケールである. よって,  $r' dt = \sigma \sqrt{T_L} dw(t)$ .

$$dq_* = a q_*^b (\bar{r} - q_*) dt + a q_*^b \sigma \sqrt{T_L} dw(t) \quad (4-3)$$

となる. ここに,  $r'$  は平均0, 分散 $\sigma^2$ の正規分布に従う,  $dw$  は平均0, 分散 $dt$ の正規分布に従う. そうすると, 降雨流出の基礎式(4-3)と伊藤の確率微分方程式(3-2)は同じ形式になる. 従って, 流出高 $q_*$ に関する微分方程式は式(4-4)になる.

$$\frac{\partial p(q_*)}{\partial t} + \frac{\partial(aq_*^b(\bar{r}-q_*))p(q_*)}{\partial q_*} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2((aq_*^b \sigma \sqrt{T_L})^2 p(q_*))}{\partial q_*^2} \quad (4-4)$$

流出高 $q_*$ の確率密度関数 $p(q_*)$ について解くと, 定常解は式(4-5)になる.

$$p(q_*) = \frac{2p_{q_*}}{(aq_*^b \sigma \sqrt{T_L})^2} e^{\frac{2\bar{r}}{a\sigma^2 T_L} q_*^{1-b} - \frac{2}{a\sigma^2 T_L} \frac{q_*^{2-b}}{2-b}} \quad (4-5)$$

ここに,  $p_{q_*}$  は定数である.

流量と流出高の関係は式(4-6)で表す.

$$Q = \frac{1}{3.6} A q_* \quad (4-6)$$

ここに  $A$ : 流域面積[km<sup>2</sup>],  $Q$ : 流量[m<sup>3</sup>/s]である. 流量と流出高は線形関係であり, 流量 $Q$ の分布は確率密度関数 $p_Q(Q)$ 式(4-7)で表す.

$$p_Q(Q) = \frac{2p_Q}{(aQ^b \sigma \sqrt{T_L})^2} e^{\frac{2\bar{r}}{a\sigma^2 T_L} \frac{Q^{1-b}}{1-b} - \frac{2}{a\sigma^2 T_L} \frac{Q^{2-b}}{2-b}} \quad (4-7)$$

ここに,  $p_Q$  は定数である.

次に水深に関しては, 矩形断面水路で等流状態を考えると, 流量と水深の関係は式(4-8)で表す.

$$Q = \frac{1}{n} \sqrt{i} h^{\frac{2}{3}} B h = \frac{B}{n} \sqrt{i} h^{\frac{5}{3}}, \quad h = \left(\frac{n}{B\sqrt{i}}\right)^{\frac{3}{5}} Q^{\frac{3}{5}} \quad (4-8)$$

ここに  $B$ : 水路幅[m],  $i$ : 水路勾配,  $n$ : 河床粗度係数である. 式(4-8)から,  $h \propto Q^{\frac{3}{5}}$ , 即ち水深は流量と共に単調増加である. 従って, 水深の分布は式(4-9)で表す.

$$p_h(h) = \frac{5}{3} \left(\frac{B\sqrt{i}}{n}\right)^{\frac{9}{25}} h^{\frac{2}{25}} p_Q\left(h^{\frac{5}{3}} \frac{B\sqrt{i}}{n}\right) \quad (4-9)$$

抵抗則  $m$ , 雨の偏差 $\sigma$ , 雨の平均 $\bar{r}$ による流量, 水深の分布のトレンド(収束または分散)は右図で表す.

### 5. まとめ

本研究で得られた知見を以下に示す.

- 1) 伊藤の確率微分方程式を降雨流出過程に応用し, 雨の分布に対する流量, 水深の分布を数学的に示した.
- 2) 降雨流出過程の非線形性が強くなればなるほど, 流量, 水深の確率分布の分散は大きくなる.
- 3) 降雨の偏差, 降雨の平均が大きくなればなるほど, 流量, 水深の確率分布の分散は大きくなる.

### 参考文献

- 1) 山田正: 山地流出の非線形性に関する研究, 土木学会水工学論文集, 第47巻, pp.259-264, 2003.
- 2) 舟木久直: 確率微分方程式, 岩波書店, pp.51-81, 2005.
- 3) Claudio Floris: Numeric Solution of the Fokker Planck Kolmogorov Equation, *Engineering*, pp.975-988, 2013.
- 4) 日野幹雄: 流体力学, 朝倉書店, pp.413-436, 1992.

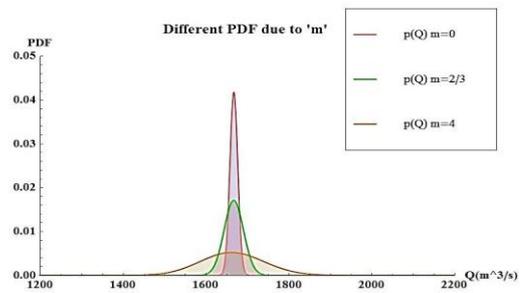


図-2 抵抗則 m と流量の不確実性の関係

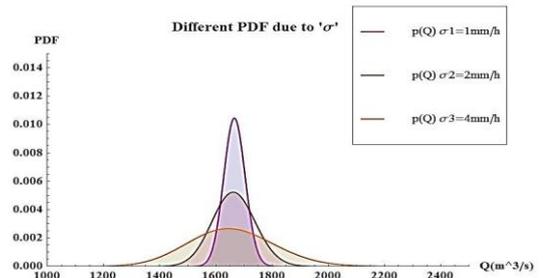


図-3 降雨の偏差と流量の不確実性の関係

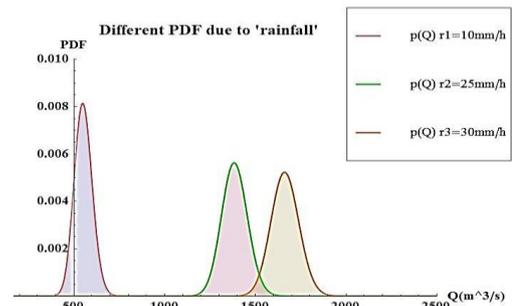


図-4 降雨の平均と流量の不確実性の関係

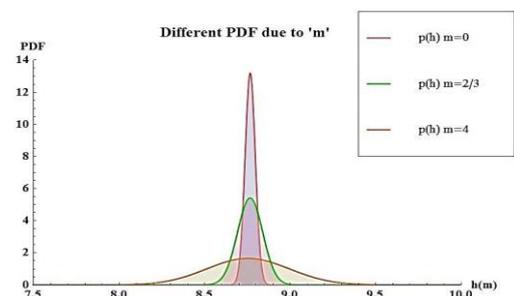


図-5 抵抗則 m と水深の不確実性の関係

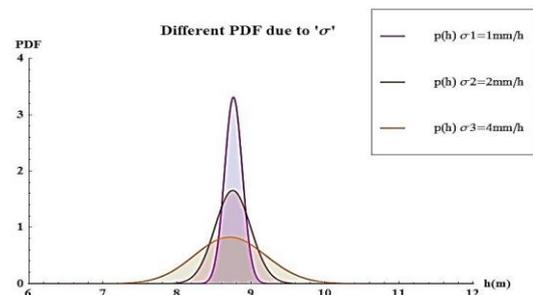


図-6 降雨の偏差と水深の不確実性の関係