Isogeometric Analysis による片持ちばりの解析

日本大学　学生員　　　○武井　奨
日本大学　正会員　　　　長谷部　寛
日本大学　フェロー会員　野村　卓史

1.　はじめに

有限要素法（FEM）は汎用性が高く様々な分野で用いられている解析方法である．しかし，メッシュ生成に多くの時間を要し，トータルの解析時間の数十%を占めるといわれている [1]．また，FEM では変数の近似に低次の多項式が用いられることが多く，その場合 CAD で描かれるような複雑な曲線や曲面を有する解析対象の形状を厳密に表現することは困難である．

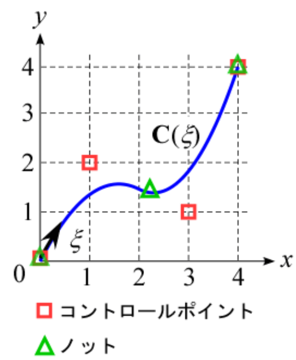
そこで提案された解析手法が Isogeometric Analysis（IGA）である [1]．IGA は変数の基底関数に CAD で曲線を描く際に用いられる NURBS（Non Uniform Rational B-Spline）を採用する．その結果，FEM では困難であった曲線や曲面を有する解析対象の厳密な形状表現が可能となる．将来的に土木構造物の解析に IGA を活用することを目指し，本研究では IGA の基本的特性を把握するために片持ちばりの解析を行った．

2.　NURBS 基底関数

NURBS 曲線は，実空間上に配置されるコントロールポイントの座標値と，ノットと呼ばれるパラメータを用いて形状が表現される．

図 1 に NURBS 曲線の例を示す．基底関数の次数を 2 次とし，4 点のコントロールポイントで構成した 2 要素の曲線である．式(1)に示す曲線形状 $\mathbf{C}(\xi)$ は，NURBS 基底関数 $R_i^p(\xi)$ [式(2)]とコントロールポイントの座標から構成される位置ベクトル $\mathbf{B}_i$ [式(3)]の線形結合で表される．

曲線の要素はノットで分割される．ノットは曲線の両端で次数+1 点重ねる必要がある．図 1 中にノットを順に並べたノットベクトルを示す．



・コントロールポイントの座標値と重み

i	$\mathbf{B}_i$ x_i	y_i	重み w_i
1	0	0	1
2	1	2	$1/\sqrt{2}$
3	3	1	$1/\sqrt{2}$
4	4	4	1

・ノットベクトル

$$\Xi=\{0,0,0,0.5,1,1,1\}$$

図 1　NURBS 曲線の例

$$\mathbf{C}(\xi)=\sum_{i=1}^{n} R_i^p(\xi)\mathbf{B}_i \qquad (1)$$

$$R_i^p(\xi)=\frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{\hat{i}=1}^{n} N_{\hat{i},p}(\xi)w_{\hat{i}}} \qquad (2) \qquad\qquad \mathbf{B}_i=\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

$$N_{i,p}(\xi)=\frac{\xi-\xi_i}{\xi_{i+p}-\xi_i}N_{i,p-1}(\xi)+\frac{\xi_{i+p+1}-\xi}{\xi_{i+p+1}-\xi_{i+1}}N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (4)$$

$\mathbf{C}(\xi)$:形状曲線，$R_i^p(\xi)$:NURBS 基底関数，
$N_{i,p}(\xi)$: B-Spline 基底関数，w_i : 重み，
ξ_i :ノットベクトルの要素，
n : コントロールポイント数，p : 基底関数の次数

3.　片持ちばりの解析

基礎方程式に線形弾性体の応力の平衡方程式を用いて片持ちばり解析を行った．変位を未知数とし，境界条件には，変位を規定する条件と表面力を規定する条件を与えた．

応力の平衡方程式： $$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}+f_i=0 \qquad (5)$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right), \quad \sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{ij}$$

境界条件： $u_i=\overline{u}_i$ ， $\sigma_{ij}n_j=h_i$

σ_{ij} :応力テンソル，ε_{ij} :ひずみテンソル，f_i :物体力，
u_i :変位ベクトル，h_i :表面力，C_{ijkl} : 弾性テンソル

キーワード：Isogeometric Analysis，NURBS，片持ちばり
連絡先　〒101-8308　東京都千代田区神田駿河台 1-8-14

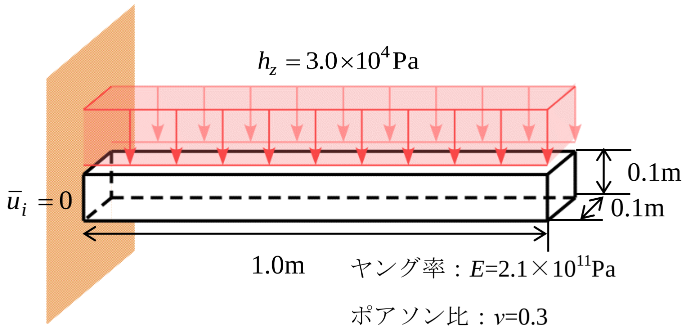


図 2　片持ちばりの解析メッシュと境界条件

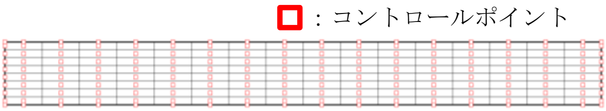


図 3　次数 2 の解析メッシュ

表 1　解析メッシュのデータ

次数	1 次	2 次	3 次
コントロールポイント数	153	180	209
要素数	128	128	128

図 2 に示す左端が固定された等分布荷重を受ける片持ちばりを対象に，要素数を等しくし，基底関数を 1 次から 3 次まで変えた 3 種類の解析を行った．ガウスの求積法における積分点は 3 点とした．

図 3 に 2 次の基底関数を用いた解析メッシュ，表 1 に解析メッシュのデータを示す．ソリッド要素を用い，要素分割数は，縦 8，横 16，奥行き 1 の 128 要素の解析メッシュである．解析メッシュの作成には Rhinoceros を使用した．すべて直線で構成されるメッシュのため，NURBS の重みは 1 となり，実質は B-Spline の基底関数を用いたことになっている．

4.　解析結果

図 4 に 3 種類の解析の変形図を示す．変位を 200 倍にして描いている．表 2 に各解析の自由端の鉛直変位とベルヌーイ・オイラーはり理論の理論値を示す．

各解析結果と理論値を比較すると，次数が増えるにつれて理論値に近づいていることがわかる．また，1 次の基底関数を用いた解析メッシュはロッキングのような現象が生じたため，理論値と差のある結果になった．

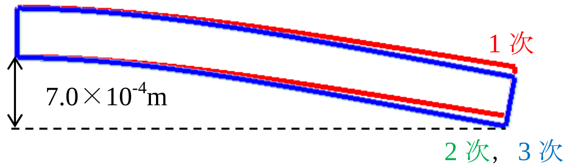


表 2　自由端の鉛直変位の解析結果

	鉛直変位(m)
1 次	6.04×10^{-4}
2 次	6.98×10^{-4}
3 次	7.00×10^{-4}
理論値	7.14×10^{-4}

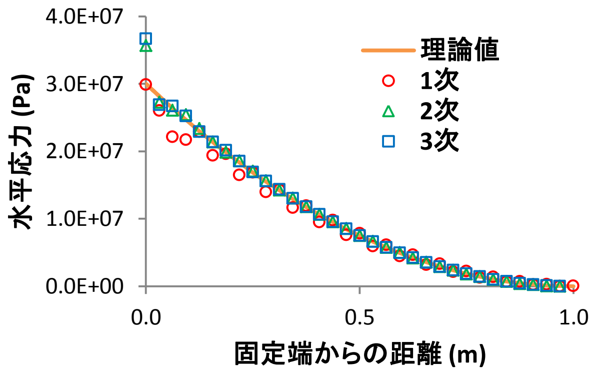


図 5　はり上縁の水平応力の解析結果

次に，はり上縁の水平方向の応力分布を理論値と比較とした．図 5 に理論値との比較結果を示す．1 次の基底関数を用いた場合，空間的な数値振動が生じた．2 次，3 次の基底関数を用いた場合，理論値の 2 次曲線に沿った曲線的な分布を表現できた．また，2 次よりも 3 次の基底関数を用いた方がより理論値に近い応力分布となった．

5.　おわりに

本研究では，IGA を用いて等分布荷重を受ける片持ちばりの解析を行った．1 次の基底関数を用いた場合ロッキングのような現象が生じたが，2 次，3 次の場合，自由端の鉛直変位，水平応力分布ともに理論値にほぼ一致する結果を得ることができた．

参考文献

1)　J.A.Cottrell, et al. : Isogeometric Analysis Toward Integration of CAD and FEA, Wiley, 2009

2)　山田貴博：高性能有限要素法，丸善，2007