

# 演算子積分時間領域境界要素法を用いた薄板による 3次元音響波動散乱解析

群馬大学大学院理工学府  
群馬大学大学院理工学府  
群馬大学 理工学研究院

学生会員 ○笠原弘貴  
学生会員 増村佳大  
正会員 斎藤隆泰

## 1. はじめに

本研究では、薄板による3次元音響波動散乱解析を演算子積分時間領域境界要素法を用いて実行する方法について検討する。演算子積分法<sup>1)</sup>は、畳込み積分をラプラス変換領域の関数を用いて離散化近似する方法である。その演算子積分法を時間領域境界要素法に適用した演算子積分時間領域境界要素法は、時間領域で閉じた形式の基本解を求めることが難しい問題に対して有効な手法である。また、解析スキームは従来法に比べ容易であり、扱いやすい。そのため、例えば通常的时间領域境界要素法の定式化で最も難解な薄板による3次元音響波動散乱問題(いわゆる crack 問題)等に対して演算子積分時間領域境界要素法を開発することは、応用面も含めて意義深いものである。

そこで、本研究では、薄板による3次元音響波動散乱問題に対する演算子積分時間領域境界要素法を定式化し、計算精度の確認等を行うことで、本手法の有効性を示す。

## 2. 解くべき問題

解くべき問題は、図1に示すような、3次元無限領域 $\bar{S}$ 内における薄板による入射音響波動 $u_I(\mathbf{x}, t)$ の散乱問題とし、 $u_I(\mathbf{x}, t)$ が薄板に到達するまでは、一切の擾乱は起こらない、いわゆる静止過去の条件を満足するものと仮定する。今、位置 $\mathbf{x}$ 、時刻 $t$ における音圧を $u(\mathbf{x}, t)$ としたとき、 $u(\mathbf{x}, t)$ は次の方程式を満足する。

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

ただし、 $c$ は波速を表す。このとき、音圧 $u(\mathbf{x}, t)$ および薄板両面における音圧差 $\phi(\mathbf{x}, t)$ は、薄板面 $S$ およびその縁 $\partial S$ に対して次の2つの条件を満足する。

$$\frac{\partial u^\pm(\mathbf{x})}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S \quad (2)$$

$$\phi(\mathbf{x}) = u^+(\mathbf{x}) - u^-(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{on } \partial S \quad (3)$$

ただし、式(2)における $\partial/\partial n$ は薄板面 $S$ の外向き法線方向微分を表し、右上添字 $(\ )^\pm$ は、それぞれ薄板の上下面を表している。

## 3. 時間領域境界要素法

前節で述べた3次元薄板に対する入射音響波動 $u_I(\mathbf{x}, t)$ の散乱問題を積分方程式を用いて解析する。この問題の音圧

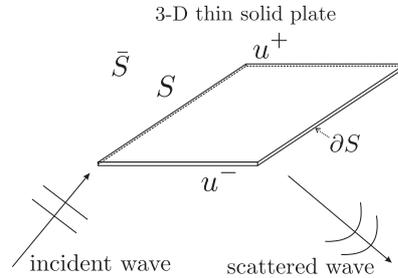


図1 薄板による音響波動散乱問題。

$u(\mathbf{x}, t)$ に対する解は、次の積分方程式を解くことで求まる。

$$u(\mathbf{x}, t) = u_I(\mathbf{x}, t) + \int_S \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\partial n_y} * \phi(\mathbf{y}, t) dS_y \quad (4)$$

ここで、 $*$ は畳込み積分、 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ は3次元音響波動問題における時間領域基本解

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (5)$$

を表している。ただし、 $\delta$ はディラックのデルタ関数であり、 $r$ は $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ により定義される。式(4)において、領域内部の点 $\mathbf{x}$ を薄板面 $S$ に極限移行し、法線方向で微分することにより、次の超特異積分方程式を得ることができる。

$$-\frac{\partial u_I(\mathbf{x}, t)}{\partial n_x} = \int_S \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\partial n_x \partial n_y} * \phi(\mathbf{y}, t) dS_y, \quad \mathbf{x} \in S \quad (6)$$

式(6)の超特異積分方程式は基本解の2階微分を含む。そのため、境界要素法で通常用いられるガウスの数値積分を用いて式(6)を評価すると、計算精度の低下を招く。そこで、式(6)の特異性のオーダーを下げるために正則化を施すと、次式を得る。

$$-\frac{\partial u_I(\mathbf{x}, t)}{\partial n_x} = -n_j(\mathbf{x}) e_{jpb} \int_S n_i(\mathbf{y}) e_{iqb} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\partial y_p} * \frac{\partial \phi(\mathbf{y}, t)}{\partial y_q} dS_y - \frac{1}{c^2} \int_S n_i(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{y}) * \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\partial t^2} * \phi(\mathbf{y}, t) dS_y \quad (7)$$

ここで、 $n_i(\mathbf{x})$ は単位法線ベクトル、 $e_{ijk}$ は交代記号を表す。式(7)を時間と空間に関して離散化することで、薄板両面における音圧差 $\phi(\mathbf{x}, t)$ を求めることができる。しかしながら、式(7)を時間に関して離散化することは、一般には手間がかかるため、本研究では、演算子積分法<sup>1)</sup>を適用する。

**Key Words:** 演算子積分時間領域境界要素法、薄板、音響波動

〒376-8515 群馬県桐生市天神町1-5-1 群馬大学大学院理工学府 TEL.0277-30-1610 E-mail:t14803011@gunma-u.ac.jp

#### 4. 演算子積分法の時間領域境界要素法への応用

演算子積分法を用いて式(7)を離散化する. 空間に関する離散化に  $M$  個の一定要素を用いた選点法, 時間に関する離散化に総時間ステップ数  $N$ , 時間増分を  $\Delta t$  とした演算子積分法を適用すれば, 超特異積分方程式(7)は次のように書き直せる.

$$-\frac{\partial u_I(\mathbf{x}, n\Delta t)}{\partial n_x} = \sum_{\alpha=1}^M \sum_{k=1}^n \left[ B^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) \phi(\mathbf{y}^\alpha, k\Delta t) - A^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) \phi(\mathbf{y}^\alpha, k\Delta t) \right] \quad (8)$$

ただし, 添字  $\alpha$  はソース点を表す指標であり, 影響関数  $A^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}), B^m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  は, 演算子積分法の適用によりそれぞれ次のように表される.

$$A^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} n_i(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{y}) \int_S \left(\frac{s_l}{c}\right)^2 \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} dS_y \quad (9)$$

$$B^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} n_j(\mathbf{x}) e_{jpb} \oint_{\partial S} \frac{\partial \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l)}{\partial y_p} e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} dy_b \quad (10)$$

ただし,  $i$  は虚数単位,  $\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l)$  はラプラス変換領域における3次元音響波動問題の基本解である. また,  $s_l$  はラプラスパラメータであり,  $s_l = \delta(\zeta_l)/\Delta t$  で表される. 一方,  $\mathcal{R}, L, \delta(\zeta_l)$  は演算子積分法のパラメータ<sup>1)</sup>である. 式(10)における, 積分  $\oint_{\partial S} dy_b$  は, き裂の縁  $\partial S$  に対する線積分を表しており, その導出にはストークスの定理<sup>2)</sup>を用いている. そのため, 式(7)の第一項の計算には, 音圧差  $\phi$  に対する空間の一階微分が表れるが, 式(8)では直接にその微分を評価する必要はないことに注意する.

以上より, 式(8)について第1ステップから, 最終の第  $N$  ステップまで逐次計算を行うことにより, 各ステップにおける薄板両面における音圧差  $\phi(\mathbf{x}, t)$  を求めることができる.

#### 5. 数値解析例

以下, 数値解析例を示す. 解析モデルとして, 図2のような原点中心, 半径  $a$  の円形薄板を考え, 要素数 824 の三角形要素でモデル化する. また, 時間増分を  $c\Delta t/a = 0.05$ , 精度  $\epsilon$  を  $\epsilon = 1.0e-16$  と設定し,  $L$  および総時間ステップ数  $N$  を  $L = N = 128$  とし, 式(9), (10)に対する影響関数の計算に高速フーリエ変換 (FFT) を適用し, 高速に計算を実行することとする. ここでは, 入射音響波  $u_I(\mathbf{x}, t)$  を図2における入射角  $\theta$  が  $\theta = 0^\circ$  となる次の平面波で与えた.

$$u_I(\mathbf{x}, t) = A \frac{x_3 + ct}{a} H(x_3 + ct) \quad (11)$$

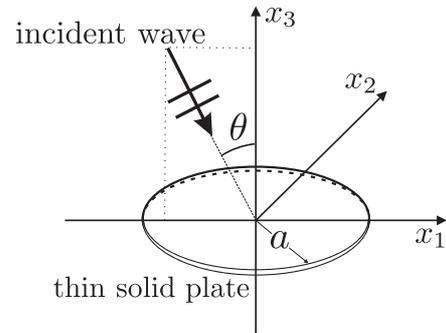


図2 円形薄板.

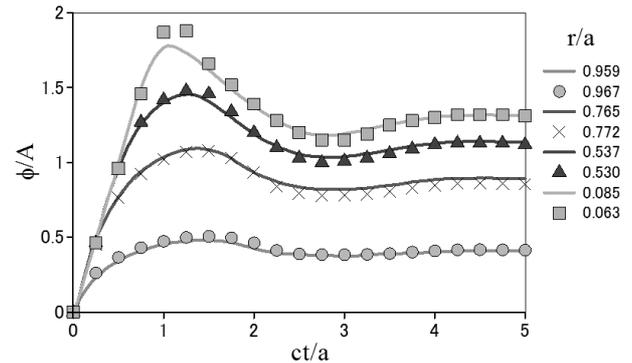


図3 薄板上の様々な点における  $\phi(\mathbf{x}, t)$  の時間変化.

ここで,  $A$  は振幅,  $H$  はステップ関数を表す. 図3は, 式(11)を円形薄板に対して入射させた場合の, 円形薄板上の原点からの距離  $r/a$  における音圧差  $\phi(\mathbf{x}, t)$  の時間変化を示している. 参考のため, Hirose らによる従来の時間領域境界要素法で求めた解<sup>3)</sup>を実線で示している. ただし, Hirose らによる解と, 本研究で求めた数値解では, 空間による離散化メッシュやその離散化方法が異なるため, 直接に同一点上での数値解を比較しているわけではないことに注意されたい. 図3より例えば原点近傍での  $ct/a = 1.0$  付近における  $\phi/A$  の値について若干の差異が見られるものの, 全体としては概ね解析結果は一致していると考えられる.

#### 6. まとめと今後の課題

演算子積分時間領域境界要素法を用いて3次元薄板による音響波動の散乱問題を解析する方法を示した. 数値解析例として, 円形薄板による入射波の散乱問題を解析することで, 本手法の計算精度を確認した. 今後は, 本手法を用いて防音壁による音響騒音の解析等へ応用するとともに, 高速多重極法を適用する等の高速化についての検討も行っていく予定である.

#### 参考文献

- 1) Lubich, C.: Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math.*, **52**, pp. 129-145, 1988.
- 2) 斎藤隆泰・金井翔平・丸山泰蔵・古川陽・廣瀬壯一: 演算子積分時間領域境界要素法を用いた接触境界条件を考慮した3次元クラックによる弾性波動散乱解析, 計算数理工学論文集 vol.14, pp.31-36, 2014.
- 3) Hirose, S. and Achenbach, J. D.: BEM method to analyze the interaction of an acoustic pulse with a rigid circular disk, *Wave Motion*, **10**, pp. 267-275, 1987.