

入射波動の位相差を考慮した 周期連続橋・地盤連成系の3次元波動応答特性

新潟大学大学院自然科学研究科 学生員 ○古里 駿
新潟大学工学部建設学科 正会員 阿部 和久
新潟大学災害・復興科学研究科 正会員 Pher Errol Balde QUINAY
新潟大学大学院自然科学研究科 正会員 紅露 一寛

1. はじめに

連続橋に代表される長大構造物では、その長手方向に同一の構造単位が周期的に配置されている。このような構造物が地震波の斜め入射を受ける場合、構造物長手方向に位相差を持つ力を受ける恐れがある。したがって、地震動の位相差を考慮した長大構造物の耐震設計することが望ましい。

文献1)では、入射波の位相差の影響に着目してはいるものの、構造物は打ち切り端を持つ有限長構造物としてモデル化されている。このようなモデルでは打ち切り端からの反射波が発生する。この反射波と位相差の影響を数値解析で分離することは困難である。

そこで、文献2)では打ち切り端のない無限周期構造物と地盤との連成系を対象とした解法を構成し、文献1)の構造物を対象に応答解析を行った。その結果、構造物の定在波モードを持つ波数周波数において、最大応答が観測された。このモードは非ゼロ水平(Floquet)波数成分を有しているため、同位相の波動を鉛直上向きに入射する従来の解析では再現し得ない。この点から、文献2)では波動応答に対する位相差の重要性を述べている。

ただし、文献2)では2次元モデルの地盤を用いて解析を行っており、周期構造物と3次元地盤との連成を厳密に考慮できていない。そこで本研究では地盤を3次元成層半無限弾性場としてモデル化し、無限周期構造物との連成を解析可能な有限要素解析手法を構成する。

文献1)及び文献2)で使用了した構造物と3次元地盤との連成系を対象に解析を行う。それより得られる応答特性と2次元モデルによる文献2)の解析結果との比較を行う。

2. 対象とする問題

図1のような3次元半無限成層地盤上におかれた無限周期構造物を対象とする。当該構造物の基礎は、長手方向(x 軸方向)に等間隔 L_x で配置されているものとする。地盤は有限層数の等方均質な弾性体で構成されており、最下層は一樣半無限場で与えられているものとする。最下層から入射する実体波 u^I を次の平面波で与える。

$$u^I = a e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (1)$$

ここで、 a は振幅ベクトル、 ω は円振動数、 $\mathbf{k}$ は波数ベクトル、 $\mathbf{r}$ は (x, y, z) 座標を内包する位置ベクトルである。

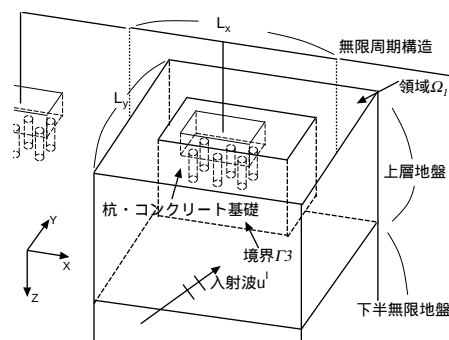


図1 研究対象とする3次元解析モデルの1ユニット

(1) Floquet 原理の概要

Floquet 原理を用いると、長手方向に無限に連なる周期構造物の動的問題を、周期構造物を構成している最小構造単位の問題に帰着することができる。この最小構造単位をユニットセルと呼び、Floquet 原理により次の周期性が成り立つ。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x + nL_x, k_x) &= e^{-ik_x L_x} \mathbf{u}(x, k_x) \\ \mathbf{F}(x + nL_x, k_x) &= -e^{-ik_x L_x} \mathbf{F}(x, k_x) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで n は整数である。 L_x はユニットセルの周期長であり、 k_x は $(-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L})$ の区間内の実数で Floquet 波数と呼ぶ。

3. 1ユニットの運動方程式

(1) 1ユニットの運動方程式

図1のような半無限地盤上の連続橋について、円振動数 ω の下で加振した場合の定常応答解を求める問題を考える。周期長 L_x の無限周期構造物を持つ連成系に式(1)の波動が入射する場合、Floquet 原理を適用することによって、無限周期構造物を持つ連成系の力学問題は図1中央の最小単位構造物となるユニットセル(図2)の力学問題となる²⁾。

ここでは境界 Γ_3 は杭及びコンクリート基礎を内包するような成層地盤内の境界、 L 及び R はそれぞれ1ユニットの左端及び右端の境界を示す。これ以降は、下添え字 $(\cdot)_3$ は Γ_3 上の節点、 $(\cdot)_{L,R}$ はそれぞれ1ユニットの左端、右端の節点、 $(\cdot)_M$ は前述した節点以外のユニットセル内の節点のベクトル及び行列を意味する。

この問題を解くために、上方の層状地盤内の境界 Γ_3 で囲まれた基礎周辺地盤と上部構造 1 ユニットから成る部分領域の次の運動方程式を考える。

$$\begin{bmatrix} \hat{K}_{LL} & \hat{K}_{LR} & \hat{K}_{LM} & \hat{K}_{L3} \\ \hat{K}_{RL} & \hat{K}_{RR} & \hat{K}_{RM} & \hat{K}_{R3} \\ \hat{K}_{ML} & \hat{K}_{MR} & \hat{K}_{MM} & \hat{K}_{M3} \\ \hat{K}_{3L} & \hat{K}_{3R} & \hat{K}_{3M} & \hat{K}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_L \\ u_R \\ u_M \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_L \\ F_R \\ F_M \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

ここで、 $\hat{K}_{ij} = K_{ij} - \omega^2 M_{ij}$ である。なお、 K_{ij} は剛性行列、 M_{ij} は質量行列、 ω は円振動数であり、 u_j は各節点変位、 F_j は各境界に作用する等価節点力である。

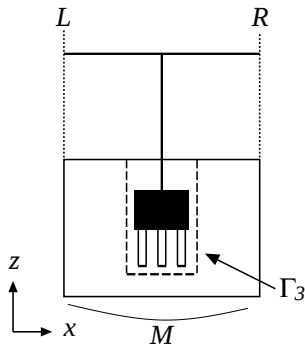


図2 ユニットセル平面図

この 1 ユニットには、Floquet 原理によりユニットの左右端の節点について次の周期性が課せられる。

$$u_R = u_L e^{-ik_x L_x}, \quad F_R = -F_L e^{-ik_x L_x} \quad (4)$$

ここで、 k_x は入射波動の x 方向波数である。

式 (4) を式 (3) に代入し u_R 成分を消去すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \hat{K}'_{LL} & \hat{K}'_{LM} & \hat{K}'_{L3} \\ \hat{K}'_{ML} & \hat{K}'_{MM} & \hat{K}'_{M3} \\ \hat{K}'_{3L} & \hat{K}'_{3M} & \hat{K}'_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_L \\ u_M \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ここで、 K'_{ij} は式 (4) によって縮約された行列である。また、 F_L は縮約の過程で消去され、部分領域内には外力の作用はないものとし F_M は 0 とする。

式 (5) で、 Γ_3 上の節点力 F_3 が未知となるため、境界 Γ_3 の内部と外部について以下の変位の適合条件及び力のつり合い条件を与える。

$$u_3^I = u_3^O, \quad -F_3^I = F_3^O \quad (6)$$

ここで I は境界 Γ_3 の内部の成分であり式 (5) の $(\cdot)_3$ 成分と同一である。 O は境界 Γ_3 の外部の成分を示す。

対象とする変位と節点力を、構造物の存在しない成層地盤である自由場の成分と構造物が地盤内に存在することで発生する散乱波の成分に分解すると次の関係式を得る。

$$u_3^O = u_3^S + u_3^f, \quad -F_3^O = F_3^S + F_3^f \quad (7)$$

ここで、 f は自由場の成分、 S は散乱波成分であることを意味する。式 (7) により、 u_3^S は次式により表すことができる。

$$u_3^S = u_3^O - u_3^f \quad (8)$$

また、 Γ_3 上において以下の関係を与えるインピーダンス行列 $\tilde{K}_3$ を導入する。

$$\tilde{K}_3 u = F \quad (9)$$

式 (6) に式 (7) 第 2 式、式 (8)、式 (9) を代入して次式を得る。

$$F_3^I = -\tilde{K}_3 \{u_3^I - u_3^f\} - F_3^f \quad (10)$$

式 (5) と式 (10) より、次の求解方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \hat{K}'_{LL} & \hat{K}'_{LM} & \hat{K}'_{L3} \\ \hat{K}'_{ML} & \hat{K}'_{MM} & \hat{K}'_{M3} \\ \hat{K}'_{3L} & \hat{K}'_{3M} & \hat{K}'_{33} + \tilde{K}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_L \\ u_M \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{K}_3 u_3^f - F_3^f \end{Bmatrix} \quad (11)$$

この連立方程式を解くことで、本研究の対象とする連続橋・地盤連成系の応答解析を行うことができる。しかし、未だ $\tilde{K}_3$ 、 u_3^f 、 F_3^f の値が未知量であるため導出する必要がある。以下の (2)、(3)、(4) ではそれらの導出過程について述べる。

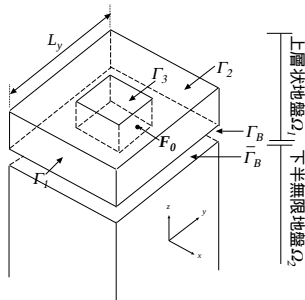
(2) インピーダンス行列 $\tilde{K}_3$ の導出

以上より、変位解 u を得るために $\tilde{K}_3$ を導出する必要がある。 $\tilde{K}_3$ は境界 Γ_3 のインピーダンス行列であるため、導出にあたって Γ_3 内の構造物の有無を問わない。従って構造物のない成層地盤の応答解析から $\tilde{K}_3$ を求めることができる。境界 Γ_3 上の 1 つの節点を加振する問題を考える。(図 3)

構造物のない当該地盤が水平面内に一様とすると、 y 軸方向に任意の周期性を有しているとみなすことができる。そこで、 y 方向に Γ_3 を包含するように周期長 L_y を設定する。その下で y 方向に Floquet 変換を適用すると、 y 方向にも Floquet 原理が成立することとなる。なお、 y 方向の Floquet 変換と逆 Floquet 変換はそれぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\tilde{y}, k_y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(\tilde{y} + nL_y) e^{ink_y L_y} \\ u(\tilde{y} + nL_y) &= \frac{L_y}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{L_y}} \tilde{u}(\tilde{y}, k_y) e^{-ink_y L_y} dk_y \\ \tilde{y} &\in [0, L_y] \end{aligned} \quad (12)$$

これにより当該問題は x 方向周期長 L_x 、 y 方向周期長 L_y の層状地盤底面で切り取られた有限な領域 Ω_1 内の加振問題に帰着する。 Γ_3 上の全ての節点に対する節点変位と内部節点力ベクトルを並べた行列の逆 Floquet 変換行列を $[U_3][F_3]$ とおくと、 $[\tilde{K}_3]$ は次式により求めることができる。

図3 加振 F_0 の作用する節点

$$[\tilde{\mathbf{K}}_3] = [\mathbf{F}_3 \cdot \mathbf{U}_3^{-1}] \quad (13)$$

しかし下半無限地盤 Ω_2 (図3) を分離する際に、層状地盤 Ω_1 底面にかかる等価節点力を与える必要がある。そこで(3)では等価節点力に必要となる Ω_2 表面のインピーダンス行列 $\tilde{\mathbf{K}}_B$ の導出を行う。

(3) インピーダンス行列 $\tilde{\mathbf{K}}_B$ の導出

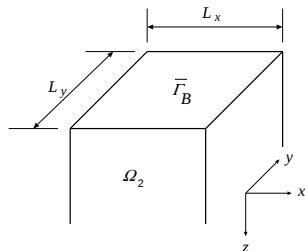


図4 ユニットセル直下の下半無限場

下半無限地盤 Ω_2 内の定常問題を考えると、 y 方向についても Floquet 原理を適用することができる。これにより Ω_2 内の定常問題も(2)と同様、 x 方向周期長 L_x と y 方向周期長 L_y 内の問題へと帰着する(図4)。

文献3)と同様に、下半無限場 Ω_2 での変位を (x, y) 面内に対して有限要素により離散近似し、深さ方向については波数展開する。この時境界 $\bar{\Gamma}_B$ の平面上の節点変位ベクトル $\bar{\mathbf{u}}_B$ と節点力ベクトル $\bar{\mathbf{F}}_B$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \{\bar{\mathbf{u}}_B\} &= [\mathbf{A}]\{\alpha\}, \\ \{\bar{\mathbf{F}}_B\} &= [\mathbf{B}]\{\alpha\} \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ は結合係数 $\{\alpha\}$ に対し節点変位ベクトル $\bar{\mathbf{u}}_B$ 、節点力ベクトル $\bar{\mathbf{F}}_B$ を与える行列である。

式(14)第1式より $\{\alpha\}$ は次式で与えられる。

$$\{\alpha\} = [\mathbf{A}^{-1}]\{\bar{\mathbf{u}}_B\} \quad (15)$$

式(15)を式(14)第2式に代入して次の関係を得る。

$$[\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}]\{\bar{\mathbf{u}}_B\} = \{\bar{\mathbf{F}}_B\} \quad (16)$$

この時 $[\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}]$ は下半無限地盤の表面 $\bar{\Gamma}_B$ におけるインピーダンス行列となっており、インピーダンス行列 $\tilde{\mathbf{K}}_B$ に等しい。

$$[\tilde{\mathbf{K}}_B] = [\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}] \quad (17)$$

(4) 変位 $\mathbf{u}_3^f$ 、節点力 $\mathbf{F}_3^f$ の導出

最後に Γ_3 上の変位 $\mathbf{u}_3^f$ と節点力 $\mathbf{F}_3^f$ を求めておく必要がある。 $\mathbf{u}_3^f$ と $\mathbf{F}_3^f$ は自由場成分であるため、構造物の存在しない地盤において求められる変位 $\mathbf{u}_3$ と節点力 $\mathbf{F}_3$ に等しい。

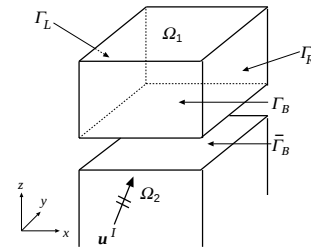


図5 構造物の無い地盤のモデル

(2)、(3)と同様に、構造物の存在しない地盤内の定常問題は層状地盤 Ω_1 内の問題に帰着する(図5)。領域 Ω_1 での運動方程式に、入射波成分の関係及び力のつり合い条件、Floquet 原理を課すことで以下のような関係式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}'_{AA} & \hat{\mathbf{K}}'_{AB} \\ \hat{\mathbf{K}}'_{BA} & \hat{\mathbf{K}}'_{BB} + \tilde{\mathbf{K}}_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_A \\ \mathbf{u}_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \tilde{\mathbf{K}}_B \mathbf{u}_B^I + \hat{\mathbf{K}}_B \mathbf{u}_B^I \end{Bmatrix} \quad (18)$$

ここで $(\cdot)_B$ は Ω_1 の底面 Γ_B の成分であり、 $(\cdot)_A$ はそれ以外の Ω_1 内の成分である。式(18)によって、入射波 $\mathbf{u}^I$ に対する Ω_1 の変位応答 $\mathbf{u}_A$ 、 $\mathbf{u}_B$ を得ることができる。この $\mathbf{u}_A$ 、 $\mathbf{u}_B$ には境界 Γ_3 の変位 $\mathbf{u}_3$ が含まれている。ここで得られた $\mathbf{u}_A$ 、 $\mathbf{u}_B$ を用いて Γ_3 の内部節点力 $\mathbf{F}_3$ を求める。

4. 解析例

(1) 文献2)の解析結果

文献2)では、2次元面外変位場を対象に解析を行った。応答解析に先立ち、構造物に対して分散解析を行っている。その結果、波数 $k_x \approx \pi/L_x$ において、分散曲線の傾きがゼロとなることを確認した。分散曲線の傾き=ゼロは、群速度がゼロの定在波モードが存在することを示している。文献2)の応答解析では、この定在波モードを持つ波数周波数において、構造物部分の最大応答を観測している。本手法を用いて、これに対応する3次元問題を図6のように設定する。本解析では、文献2)の結果を踏まえ、構造物と3次元地盤の連成系が持つ応答特性を調べる。なお、対象とする入射波はSH平面波とし、地表面 x 方向(橋軸方向)と平行に入射するものとする。

(2) 連続構造の分散特性

まず、地盤以下を剛体に置き換えて、構造物の分散解析を行う。構造物の分散曲線を図7に示す。文献2)と同様、一部の分散曲線の傾きは $k_x = \pi/L_x$ においてゼロとなり、そこに定在波モードが存在する。変形を確認すると、1, 2

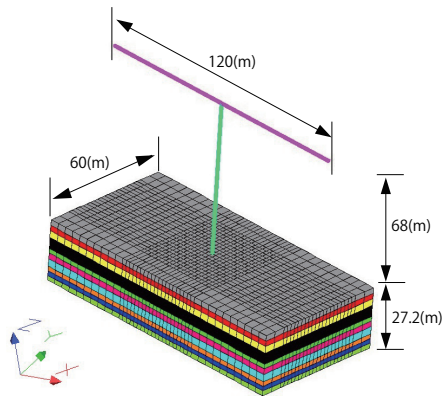


図6 解析領域の1ユニット

で示す振動モードは、 y 方向変位が卓越しており、SH 波により励起され得るものと考えられる。

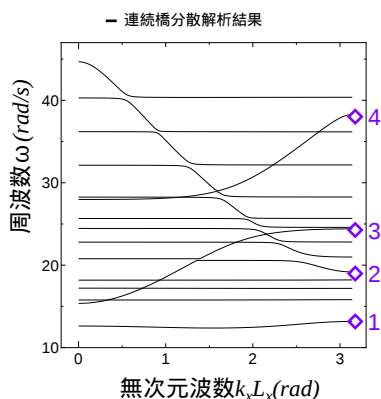


図7 三次元における分散解析結果

(3) 入射波動の設定

応答解析において入射する SH 平面波の波数 k_x と周波数 ω は、(2) に述べた 1, 2 を端部に持つ一連の分散曲線の近傍の値に設定し、 (k_x, ω) がこれらの値をとる様に入射角 ϕ を設定する。このとき x 方向に射影した入射波数 k_x は次式で与えられる。

$$k_x = \frac{\omega}{C} \times \sin \phi \quad (19)$$

ここで C は地盤最下層半無限場におけるせん断波速度である。

(4) 連成系の応答解析結果とその評価

構造物の節点変位の絶対最大値 $|u|_{max}$ を確認し、応答が卓越した共振点を図 8 の波数周波数空間にプロットする。

低周波数域では波数に依存せず伝播しないモードと Love 波のモードに沿って共振点が得られた。 $\omega = 10 \sim 40(\text{rad/s})$ の周波数域では、2 を端部に持つ一連の分散曲線に沿うように共振点が分布している。文献 2) で得られた解析結果も、これらの結果と同様の傾向を示している。

文献 2) の解析では、 $k_x \approx \pi/L_x$ において最大応答が確認された。しかし本解析では、図 8 の緑○、赤○で示す共振点で著しい変形を観測した。緑○で示す点は、一連の共振点で与えられる曲線の傾きがゼロとなる点であり、定在波の発生が考えられる。

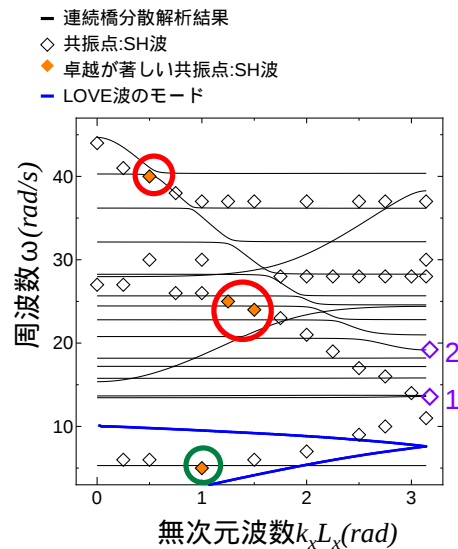


図8 SH 平面波の共振点

また、図 8 の Floquet 波数を通常の波数に変換すると、図 9 を得る。この時、赤○で示す点は、一連の共振点で与えられる曲線と地表面を伝播する波動の走行線とが接する波数周波数に位置している。このことから、赤○で示す点は、地表面を伝播する波動により励起されているものと思われる。なお、この応答特性は、文献 2) の 2 次モデルによる解析結果では得られていない。

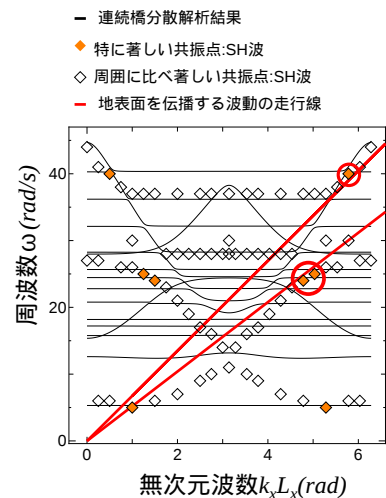


図9 Floquet 波数の変換

5. おわりに

Floquet 原理を用いることで、無限周期構造物と 3 次元成層地盤との連成解析手法を構成した。得られた応答を二次元地盤対象とした文献 2) のものと比較した。その結果、文献 2) では得られなかった、地表面を伝播する波動による励起が認められた。

参考文献

- 1) 竹宮宏和、甲斐史朗：深い杭基礎を有する多径間連続高架橋の地震応答解析，土木学会論文集，No.332，1-10，1983.
- 2) 田村 建、阿部和久、紅露一寛：SH 波の入射を受ける連続橋・半無限地盤連成系の定常応答解析，計算数理工学論文集，11，47-52，2011.
- 3) 阿部和久、荒木聡秀、紅路一寛：二重周期弾性場の有限要素表面波分散解析，土木学会論文集 A2，Vol.67，No.2，1905-1913，2011.