演算子積分時間領域境界要素法を用いた一方向炭素繊維複合材料中の弾性波動解析

群馬大学理工学研究院 学生会員 ○下田瑞斗
群馬大学工学部社会環境デザイン工学科 非会員 高野みな美
群馬大学理工学研究院 正会員 斎藤隆泰

1. はじめに

近年開発された演算子積分時間領域境界要素法 [1)] を援用することで, 従来の時間領域境界要素法に比べて安定で高精度な解析を行うことが可能となった. しかし, 異方性材料を対象とした弾性波動解析への応用は, 十分に検討されているとは言い難い. 一方, 軽量かつ高強度な材料として近年注目を集めている炭素繊維複合材料は巨視的に異方性を示し, 今後のさらなる需要増加に伴い, その材料特性について詳しく把握する必要がある. そこで本研究では, まず異方性材料に対する基礎式について確認し, 異方性面外波動問題に対する演算子積分時間領域境界要素法の定式化を示す. そして, 実際に炭素繊維複合材料に対する弾性波動解析を行い, 本手法の有効性について検討する.

2. 異方性材料中の弾性波動解析

以下, 異方性材料中の時間領域面外波動問題について考える. なお, 特に断りのない限り, ローマ文字の添字は 1, 2 を取り, それらは総和規約に従うとする. 異方性材料を伝搬する弾性波動は, 等方性の場合と異なり, 方向依存性を持つ. 例えば, 異方性主軸を座標軸に一致させ, 面内および面外波動解析を分離できる状況を想定すれば面外方向を x_3 軸とした次の Christoffel 方程式を解くことで, 位相速度や群速度を決定できる.

$$\Gamma_{33} - \rho c^2 = 0\ ,\ \Gamma_{33} = C_{3jk3} l_j l_k \tag{1}$$

ここで, Γ_{ij} は, Christoffel テンソル, ρ および C_{ijkl} は異方性材料の密度および弾性定数を表す. また, l_i および c は, 伝搬方向ベクトル成分および位相速度を表す.

3. 境界積分方程式

図 1 に示すような無限領域 D 内にある散乱体 $\bar{D}$ の境界 S による入射波 $u_3^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x}, t)$ の散乱問題を考える. 境界 S に入射波が到達するまでは静止過去の条件を満足するものとすると, 時刻 t における境界積分方程式は, 以下の式で与えられる.

$$Cu_3(\boldsymbol{x}, t) = u_3^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x}, t) + \int_S g_{33}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) * t_3(\boldsymbol{y}, t) dS_y - \int_S h_{33}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) * u_3(\boldsymbol{y}, t) dS_y \tag{2}$$

ここで, t_3 は面外変位 u_3 に対応する面外方向表面力, C は自由項, $*$ は時間に関する畳込み積分を表す. また, $g_{33}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)$ および $h_{33}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)$ は, それぞれ 2 次元異方性面外波動問題における時間領域基本解および対応する二重層核を表す. 時間に関しては演算子積分法 [2)] を, 空間に関しては M 個の区分一定要素で離散化すると第 n ステップにおいて, 次の離散化された時間領域境界積分方程式を得ることができる.

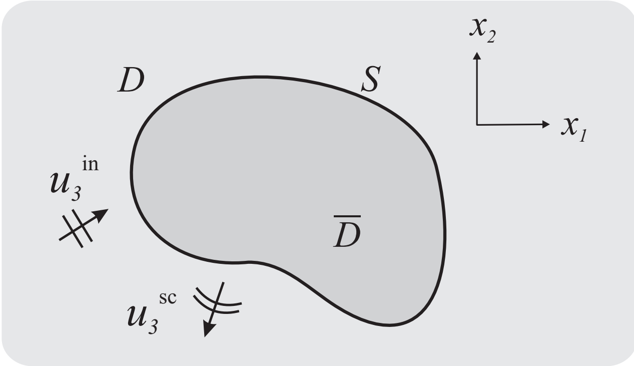

図 1 散乱体 $\bar{D}$ による面外波動散乱問題

$$\frac{1}{2} u_3(\boldsymbol{x}, n\Delta t) = u_3^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x}, n\Delta t) + \sum_{\alpha=1}^{M} \sum_{k=1}^{n} \left[A^{n-k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^{\alpha}) t_3^{\alpha}(k\Delta t) - B^{n-k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^{\alpha}) u_3^{\alpha}(k\Delta t) \right] \tag{3}$$

ただし, Δt は時間増分, 右上添字 α は, ソース点を表す指標である. また, A^m および B^m は影響関数であり,

$$A^m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[\int_S \hat{g}_{33}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s_l) dS_y \right] e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} \tag{4}$$

$$B^m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[\int_S \hat{h}_{33}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s_l) dS_y \right] e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} \tag{5}$$

で表される. ここで, s_l は $s_l = \gamma(z_l)/\Delta t$ であり, L, $\mathcal{R}$, z_l は演算子積分法のパラメータ [2)],i は虚数単位である. 一方, $\hat{g}_{33}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s_l)$, $\hat{h}_{33}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s_l)$ はラプラス変換域での 2 次元異方性面外波動問題における基本解および対応する二重層核であり, Wang と Achenbach によって導出された時間領域基本解 [3)] をラプラス変換することにより

$$\hat{g}_{33}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{|\boldsymbol{n}|=1} \frac{1}{\Gamma_{33}} \phi\left(s \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}|}{c} \right) d\boldsymbol{n} \tag{6}$$

で与えられる.

ここで, $\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ を表し, $\boldsymbol{n}$ は単位円周を表すベクトルである. また, 関数 $\phi(\xi)$ は次式で表される.

Key Words: 異方性弾性波動問題、演算子積分時間領域境界要素法, 一方向炭素繊維複合材料
〒 376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1 群馬大学大学院理工学府 TEL.0277-30-1610 E-mail:t14803028@gunma-u.ac.jp

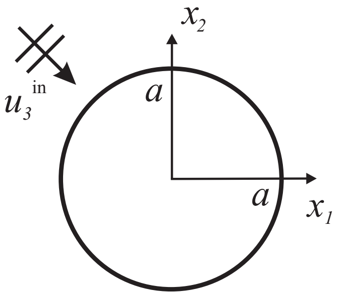

図 2 解析モデル

$$\phi(\xi) = \mathrm{e}^{\xi} E_1(\xi) + \mathrm{e}^{-\xi}\{E_1(-\xi) + \mathrm{i}\pi\} \tag{7}$$

ただし, 式 (7) における $E_1(\xi)$ は, 指数積分を表す. また, 基本解に対応する二重層核は, 次式で表される.

$$\hat{h}_{33}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s) = -C_{3jk3} n_j^* \hat{g}_{33,k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s) \tag{8}$$

ただし, $()_{,i} = \partial/\partial x_i$ とし, n_i^* は境界 S 上の外向き法線ベクトルを表す.

4.　数値解析例

数値解析例として, 図 2 に示すような半径 a の空洞に対する散乱問題を解析した. 空洞は, 72 個の要素に分割し, 媒質の弾性定数は一方向炭素繊維複合材料を想定し $C_{11} = C_{33} = 45.92$, $C_{22} = 3.98$, $C_{12} = C_{23} = 1.84$, $C_{44} = C_{66} = 1.00$, $C_{55} = 2.02$ とした.

また, 入射波は平面波として, 次式で与えた.

$$u_3^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x}, t) = u_0(1 - \cos 2\pi\alpha) \tag{9}$$

ただし,

$$\alpha = \begin{cases} \dfrac{c}{\lambda}\left(t - \dfrac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{l} + a}{c}\right) & \text{for} \quad (0 \le \alpha \le 1) \\ 0 & \text{for} \quad \text{otherwise} \end{cases} \tag{10}$$

ここで, λ, u_0 はそれぞれ入射波の波長, 変位振幅を表す. 総時間ステップ数は $N = L = 128$, 時間増分は $c\Delta t/a = 0.08$ とする.

図 4 に空洞周辺の散乱波の時間変化の様子を示す. ただし, 本解析では, 入射波の伝搬方向ベクトル $\boldsymbol{l}$ を $\boldsymbol{l} = [\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0]^t$ とする. この場合の面外波 (qS2 波) の群速度曲線を図 3 の破線で示す. ただし, 結果は $\sqrt{C_{66}/\rho}$ で無次元化されていることに注意されたい. 図 3 から確認できるように, 面外波の群速度曲線は楕円形を示し, 水平方向に大きな値を示していることが見て取れる. また, 図 4 から入射波が空洞に到達し, 散乱波が生じている様子が確認できる. この結果から, 図 3 中の面外波の群速度曲線に従って, 異方性材料特有の挙動を示していることが分かる.

5.　おわりに

一方向炭素繊維複合材料中の空洞に対する異方性面外波動問題を解析した. まず, 異方性材料中の弾性波動解析に対する基礎式について述べ, 異方性面外波動問題に対する演算子積分時間領域境界要素法の定式化を行った. そして, 具体的な異方性材料に対する解析を行うことで, 本手法の妥当性を確認した. 今後は, より異方性の強い材料に対する本手法の適用や面内波動問題への拡張, 高速多重極法や並列化の適用についても検討していく予定である.

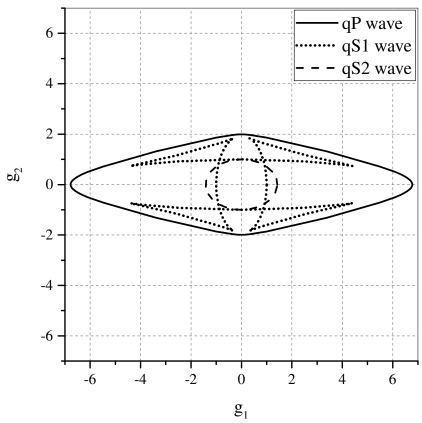

図 3 群速度曲線 (一方向炭素繊維複合材料)

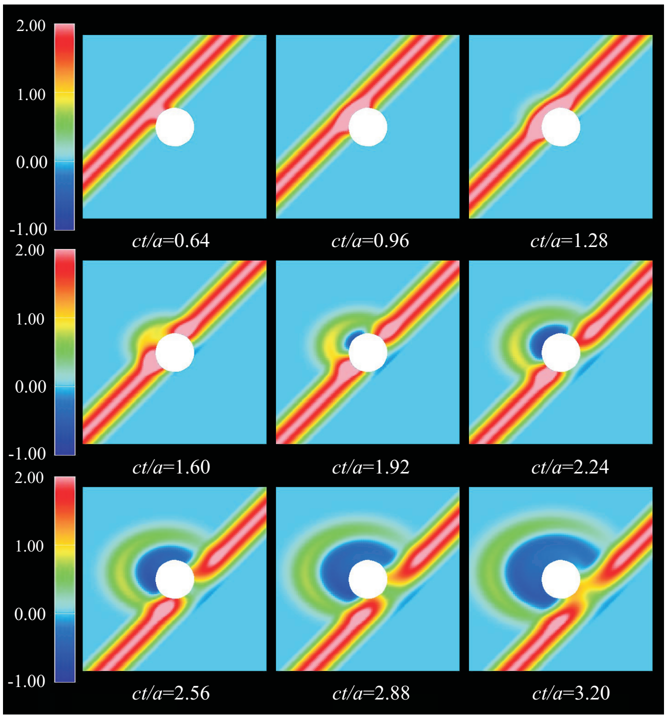

図 4 x_1-x_2 面における散乱波の時間変化

参考文献

1) 福井卓雄, 斎藤隆泰: Lubich の演算子積分法における高速多重極法, 日本シミュレーション学会論文誌, 小特集:境界要素法の新展開, **28**, pp.17-22, 2009.
2) Lubich, C. : Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math.*, **52**, pp. 129-145, 1988
3) Wang, C.-Y. and Achenbach, J.D.: Elastodynamic fundamental solutions for anisotropic solids, *Geophys. J. Int.*, **118**, pp.384-392, 1994.