

Wavelet 基底の利用による定常動弾性境界要素解析の効率化

新潟大学 正会員 ○紅露一寛
新潟大学 正会員 阿部和久

1. はじめに

弾性波の伝播問題に代表される波動伝播問題の数値解析においては、開領域や半無限領域を対象とすることも少なくない。この場合、境界要素解析は、離散化を境界上のみで実施すればよいだけでなく、遠方での波動放射を矛盾なく表現できる利点を有している¹⁾。しかし、離散化により得られる境界要素方程式の係数行列は密行列となり、大規模問題への適用が困難であるため、高速多重展開法¹⁾や wavelet の利用²⁾などの高速化・効率化解法の適用が試みられてきた。Wavelet を用いる効率化法は、境界積分方程式の離散化基底に wavelet を用いる方法で、wavelet のゼロモーメント性により微小となった係数行列成分を切り捨てることによって、離散化方程式の係数行列を疎行列にできる。特に波動伝播問題では、スカラー波動問題を対象に、周波数領域・時間域ともに非直交 wavelet²⁾を用いた場合の計算効率について検討してきた^{3),4)}が、動弾性問題は未検討である。そこで本研究では、定常動弾性問題の境界要素法において wavelet を用いた場合（以下、wavelet BEM）の計算効率を検討する。

2. 定常動弾性問題のための wavelet BEM

定常動弾性問題における境界積分方程式は、 $\tilde{u}_i(x; \omega)$ を変位、 ω を円振動数として、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta_{ij} \tilde{u}_i(\xi) + \int_{\Gamma} \tilde{t}_{ij}^*(x; \xi) \tilde{u}_i(x) d\Gamma_x \\ = \int_{\Gamma} \tilde{u}_{ij}^*(x; \xi) \tilde{t}_i(x) d\Gamma_x, \quad (x, \xi \in \Gamma) \end{aligned} \quad (1)$$

なお、領域 Ω では Lamé 定数は λ, μ 、質量密度は ρ であるものとする。境界 Γ は部分境界 Γ_u, Γ_q からなり、 $\Gamma_u \cup \Gamma_q = \Gamma$ 、 $\Gamma_u \cap \Gamma_q = \emptyset$ であるものとし、 Γ は十分滑らかであると仮定する。また、 $\tilde{u}_{ij}^*$ は基本解であり¹⁾、表面力 $\tilde{t}_i$ とその基本解 $\tilde{t}_{ij}^*$ は次式で定義される。

$$\begin{aligned} \tilde{t}_i &= \lambda \tilde{u}_{k,k} n_i + \mu (\tilde{u}_{k,i} n_k + \tilde{u}_{i,k} n_k) \\ \tilde{t}_{ij}^* &= \lambda \tilde{u}_{k,j}^* n_i + \mu (\tilde{u}_{k,j,i}^* n_k + \tilde{u}_{i,j,k}^* n_k) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 n_k は単位外向き法線ベクトル成分である。

次に、式 (1) の $\tilde{u}_i, \tilde{t}_i$ を wavelet 展開で近似する。

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i(x) &\approx \sum_{j=1}^{n_s} \hat{u}_{i,0,j} \phi_{0,j}(x) + \sum_{k=0}^m \sum_{l=1}^{n_w(k)} \tilde{u}_{i,k,l} \psi_{k,l}(x), \\ \tilde{t}_i(x) &\approx \sum_{j=1}^{n_s} \hat{t}_{i,0,j} \phi_{0,j}(x) + \sum_{k=0}^m \sum_{l=1}^{n_w(k)} \tilde{t}_{i,k,l} \psi_{k,l}(x), \end{aligned} \quad (3)$$

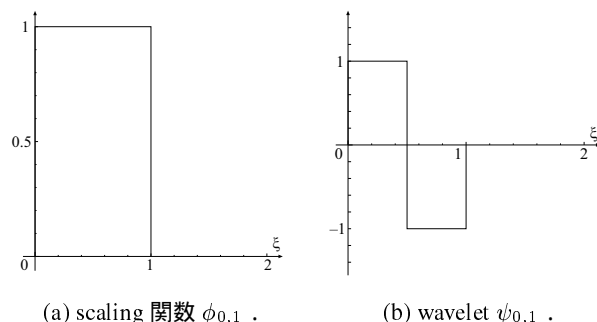


図 1 2 次元解析のための Haar wavelet .

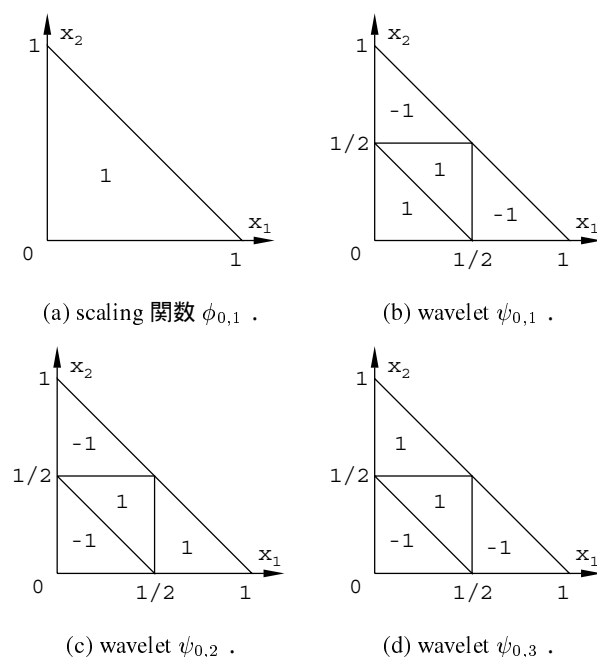


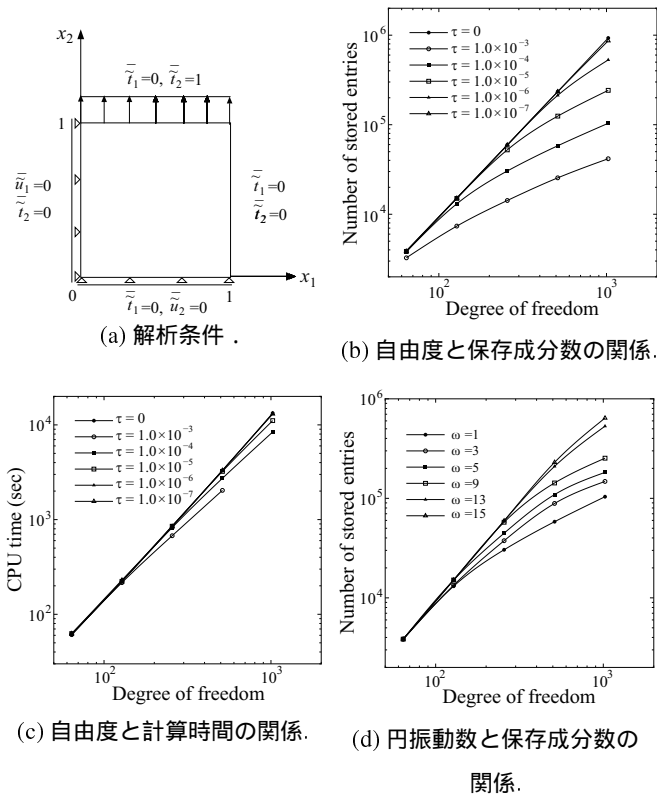
図 2 3 次元解析のための区間一定正規直交 wavelet .

ここで、 $\phi_{0,j}(x)$ は scaling 関数、 $\psi_{k,l}(x)$ は wavelet であり、本研究では、2 次元問題では Haar wavelet（図 1 参照）、3 次元問題では三角形サポートと 1 次ゼロモーメント性を有する区間一定・正規直交 wavelet（図 2 参照）を用いる。また、 $\hat{u}_{i,0,j}, \tilde{u}_{i,k,l}, \hat{t}_{i,0,j}, \tilde{t}_{i,k,l}$ は $\tilde{u}_i, \tilde{t}_i$ の wavelet 展開係数である。

式 (3) を式 (1) に代入し、Galerkin 法を適用すると、次の境界要素方程式を得る。

$$H \tilde{U} = G \tilde{T} \quad (4)$$

ここで、 G, H は係数行列であり、その成分 $g_{sl}^{(i,j)}, h_{sl}^{(i,j)}$ は次式で与えられる。

図3 2次元問題の解析条件と解析結果 ($\omega = 1$) .

$$g_{sl}^{(i,j)} = \int_{\Gamma} W_s^{(j)}(\xi) \int_{\Gamma} \tilde{u}_{ij}^*(\xi; \mathbf{x}) \cdot W_l^{(i)}(\mathbf{x}) d\Gamma_x d\Gamma_{\xi} \quad (5)$$

$$h_{sl}^{(i,j)} = \int_{\Gamma} \frac{1}{2} \delta_{ij} W_s^{(j)}(\xi) W_l^{(i)}(\xi) d\Gamma_{\xi} + \int_{\Gamma} W_s^{(j)}(\xi) \int_{\Gamma} \tilde{t}_{ij}^*(\xi; \mathbf{x}) \cdot W_l^{(i)}(\mathbf{x}) d\Gamma_x d\Gamma_{\xi} \quad (6)$$

ここで, $W_s^{(j)}$, $W_l^{(i)}$ は式 (3) の基底関数である .

係数成分の切り捨ては, 近似基底の階層に依存しない切り捨て基準値を用いて, 次式を満たす成分について実行する .

$$|g_{sl}^{(i,j)}| \leq \tau \cdot g_{max}, \quad |h_{sl}^{(i,j)}| \leq \tau \cdot h_{max} \quad (7)$$

ここで, τ は切り捨て基準値, g_{max} , h_{max} はそれぞれ $|g_{sl}^{(i,j)}|$, $|h_{sl}^{(i,j)}|$ の最大値である .

3. 2次元問題における計算効率

まず, 図3(a)に示す2次元定常動弾性問題における計算効率について検討した . なお, Lamé定数はYoung率 $E = 1$, Poisson比 $\nu = 0.3$ の下で与え, 質量密度は $\rho = 1$ とし, 切り捨て基準値は $\tau = 1.0 \times 10^{-\delta}$ ($\delta = 3, 4, 5, 6, 7$) または0 (全成分保存) に設定した .

所定の切り捨て基準値の下での, 解析自由度と係数行列の保存成分数との関係を図3(b)に示す . なお, 保存成分数は, 未知境界値の係数行列に関する数値を示している . いずれの切り捨て基準の設定の下でも, 係数成分の切り捨てによって解析時の使用メモリを大幅に削減可能であることがわかる . また, 解析自由度と計算時間の関係を図3(c)に

表1 係数行列 G の成分の保存率 .

(a) $f = 1(\text{Hz})$.		(b) $f = 100(\text{Hz})$.	
切り捨て基準値 τ	保存率 (%)	切り捨て基準値 τ	保存率 (%)
1.0×10^{-6}	1.935	1.0×10^{-6}	1.932
1.0×10^{-7}	2.161	1.0×10^{-7}	2.198
1.0×10^{-8}	4.148	1.0×10^{-8}	4.839
1.0×10^{-9}	17.973	1.0×10^{-9}	21.620
1.0×10^{-10}	47.313	1.0×10^{-10}	56.900

示す . なお, 解析においては, 切り捨て対象成分に関する不要な境界積分計算を回避する目的で, 基本解 $\tilde{u}_{ij}^*$ の漸近展開と遠方場近似に基づき構成された $|g_{sl}^{i,j}|$ の近似評価値を用いて, 境界積分計算なしに係数成分を切り捨てる方法 (事前切り捨て) を併用した . 境界積分に Gauss の数値積分を適用していることもあり, 保存成分数が大幅に削減されている場合でも, 計算時間の削減効果はさほど高くない .

最後に, 円振動数と係数行列の保存成分数との関係を図3(d)に示す . 解析対象の応答が高周波数となるほど, wavelet の利用による保存係数成分の削減効果は小さくなる .

4. 3次元問題における計算効率

3次元問題の解析例として, 辺長1の立方体を周波数 $f = \omega/2\pi$ の波動が伝播する問題を考えた . なお, 質量密度は $\rho = 1$ とし, Young率とポアソン比はそれぞれ $E = 1$, $\nu = 0.3$ とし, 解析自由度は $N = 3 \times 768 = 2,304$ である .

表1は, $f = 1, 100(\text{Hz})$ としたときの, 基本解の距離減衰性が相対的に低い係数行列 G の成分の保存率を示したものである . なお, 保存率は, 全成分を保存した場合に 100(%) となるように定義している . 解析結果より, 係数行列には微小な係数成分が多く, 近似解の精度に応じて微小成分の切り捨てにより係数成分をスパース化できることがわかる . ただし, 2次元定常波動問題の場合と同様, 高周波応答を評価する場合には保存成分数が増加しスパース性が低下する .

5. おわりに

本研究では, 定常動弾性問題における wavelet BEM の計算効率について検討した . その結果, 定常スカラー波動問題の場合と同様に, wavelet BEM が境界要素解析の効率化に対して有効であることが分かった .

参考文献

- 小林昭一編著: 波動解析と境界要素法 . 京都大学学術出版会, 2000.
- Koro, K., Abe, K.: Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis. *Engrg. Anal. Bound. Elems.*, Vol.25, pp.149-164, 2001.
- 紅露一寛, 菅波祐太, 古川 陽, 阿部和久: 2次元スカラー波動方程式のための非直交スプライン wavelet を用いた時間域境界要素法 . 土木学会応用力学論文集, Vol.13, pp.241-252, 2010.
- 紅露一寛, 阿部和久: 面外定常波動問題における非直交 wavelet を用いた境界要素法の係数行列保存成分数 . 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol.69, No.2, pp.L163-L173, 2013.