LESを用いたVOF安定化有限要素法による流体力の精度検証

中央大学大学院　学生員　○ 太田　真貴子
中央大学大学院　学生員　不室　太希
中央大学大学院　学生員　凌　国明
中央大学　正会員　樫山　和男

1. はじめに

わが国の沿岸部では今後も津波による甚大な被害が予想されており，浸水被害に加えて構造物の損傷についても検討する必要がある．その方法として任意形状への適合性に優れる有限要素法を用いた Navier-Stokes 方程式に基づく数値解析手法は有効である．また，津波は乱流現象である．

そこで，本研究では Sub Grid Scale(SGS) の渦の作用を乱流モデルにより近似する，Smagorinsky モデル[1] に基づく LES を用いた安定化有限要素法[2] による自由表面流れ解析手法を取り上げ，その精度検証を行う．数値解析例として，構造物を有する3次元ダムブレイク問題を取り上げ，構造物に作用する流体力を計算し，計算値と実験値の比較を行う．また，自由表面を表現する手法として，メッシュの歪みが生じず計算が破綻しにくい VOF 法[3] を用いる．

2. 数値解析手法

(1) 密度・粘性係数の計算

VOF 法は，自由表面位置を VOF 関数 ϕ により表現する手法であり，VOF 関数 ϕ は気体であれば 0.0，液体であれば 1.0，自由表面上であれば 0.5 の値をとる．気体，液体の密度 ρ と粘性係数 μ は以下の式により決定できる．

$$\rho = \rho_l \phi + \rho_g (1-\phi) \tag{1}$$

$$\mu = \mu_l \phi + \mu_g (1-\phi) \tag{2}$$

ここで，ρ_l，ρ_g，μ_l，μ_g はそれぞれ液体の密度，気体の密度，液体の粘性係数，気体の粘性係数である．

(2) 流速・圧力の計算

非圧縮性粘性流体の支配方程式は，以下に示すフィルター操作を施した Grid Scale(GS) の Navier-Stokes の運動方程式 **(3)** と連続式 **(4)** で表される．

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - f_i\right) + \rho \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \tag{3}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \tag{4}$$

ここで，Ω は境界 Γ で囲まれた解析領域，$\bar{u}_i$，$\bar{p}$，f_i，τ_{ij} はそれぞれ流速，圧力，物体力，SGS 応力である．

Dirichlet 境界条件および Neumann 境界条件は，それぞれ式 **(5)**，**(6)** のように示す．

$$\bar{u}_i = g_i \quad \text{on} \quad \Gamma_{\mathrm{g}} \tag{5}$$

$$\left(-\bar{p}\delta_{ij} + 2(\mu + \rho\nu_{SGS})\overline{S}_{ij}\right) n_j = h_i \quad \text{on} \quad \Gamma_{\mathrm{h}} \tag{6}$$

Γ_g，Γ_h はそれぞれ Dirichlet 境界条件および Neumann 境界条件が与えられる境界を表し，g_i，h_i はそれぞれ境界上での流速とトラクションを表す．δ_{ij}，n_j，ν_{SGS}，$\overline{S}_{ij}$ はそれぞれ Kronecker のデルタ，外向き単位法線ベクトル，SGS 渦動粘性係数，ひずみ速度テンソルの GS 成分を表す．

支配方程式 **(3)**，**(4)** に対し，空間方向の離散化には SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法を適用し，時間方向の離散化には Crank-Nicolson 法を適用する．

(3) 自由表面位置の計算

VOF 関数は，以下に示す移流方程式 **(7)** と初期条件 **(8)** により支配される．

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{7}$$

$$\phi = \phi_0 \qquad \text{at} \quad t = 0 \tag{8}$$

ここで，$\bar{u}_i$，ϕ_0 はそれぞれ流速，VOF 関数の初期値である．$\bar{u}_i$ は Navier-Stokes の運動方程式 **(3)** と連続式 **(4)** から計算した値を用いる．

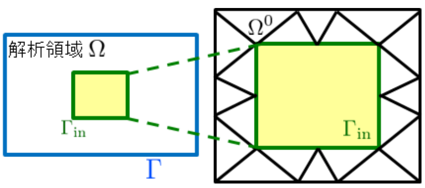
支配方程式 **(7)** に対し，空間方向の離散化には SUPG 法に基づく安定化有限要素法を適用し，時間方向の離散化には Crank-Nicolson 法を適用する．

(4) 流体力の計算

支配方程式 **(3)**，**(4)** に対し，重み付き残差法を適用し，圧力項と粘性項に対して部分積分を施すことにより，以下の弱形式が得られる．

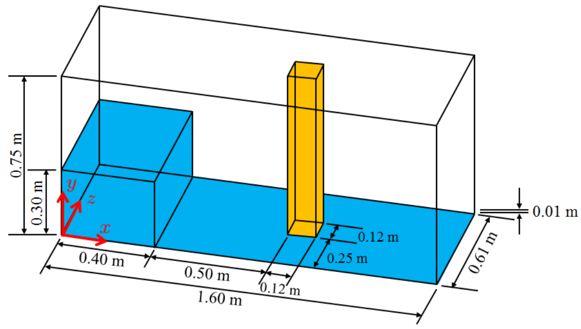
$$\int_{\Omega^0} w_i^h \rho \left(\frac{\partial \bar{u}_i{}^h}{\partial t} + \bar{u}_j{}^h \frac{\partial \bar{u}_i{}^h}{\partial x_j} - f_i\right) d\Omega - \int_{\Omega^0} \frac{\partial w_i^h}{\partial x_i} \bar{p}^h d\Omega + \int_{\Omega^0} q^h \frac{\partial \bar{u}_i{}^h}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega^0} \frac{\partial w_i^h}{\partial x_j} 2(\mu + \rho\nu_{SGS})\overline{S}_{ij} = \int_{\Gamma_{\text{in}}} w_i^h \left(-\bar{p}\delta_{ij} + 2(\mu + \rho\nu_{SGS})\overline{S}_{ij}\right) n_j d\Gamma \tag{9}$$

ここで，Ω^0 と Γ_{in} は，**図－1** に示すように，構造物周りの領域と境界を表す．Γ_{in} 上の重み係数をゼロとしない場合を考えると，右辺の積分項そのものが構造物に働く流体力となる．計算された流速と圧力を，式 **(9)** に代入することにより，構造物に働く流体力が求められる．

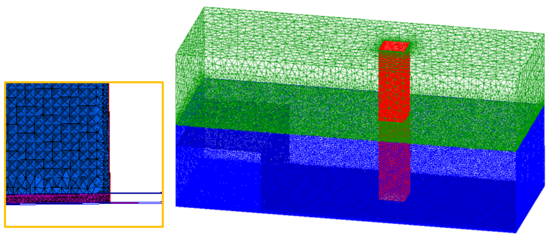


図－1　解析領域と構造物周りのメッシュ拡大図

KeyWords： VOF 法，安定化有限要素法，流体力，LES，Smagorinsky モデル
連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27　TEL. 03-3817-1815　Email：otamkk@civil.chuo-u.ac.jp

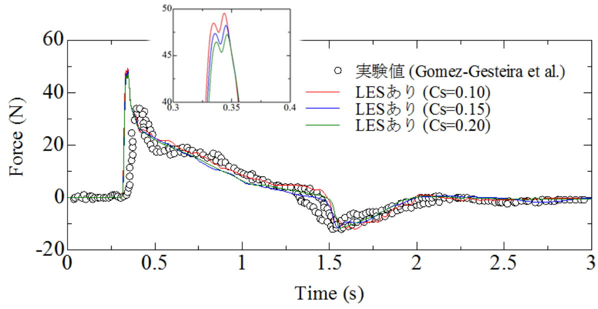


図－２　解析モデル

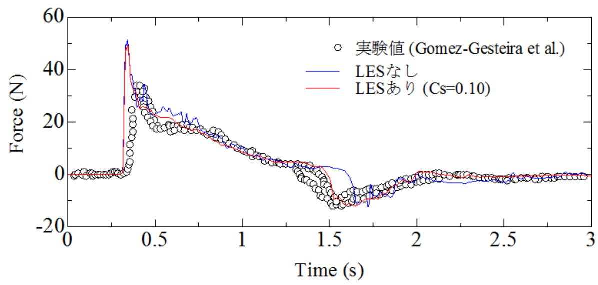


(a) 底面と構造物周辺　　(b) 解析領域全体

図－３　解析メッシュ図

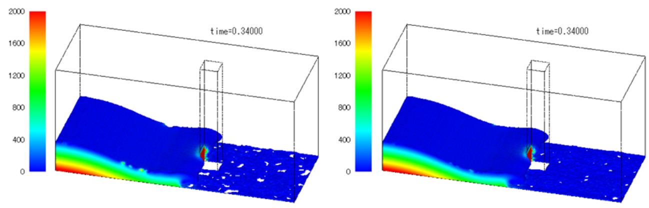


(a)Smagorinsky 定数の違い



(b)LES の有無

図－４　構造物に働く x 方向の流体力の時刻歴



(a)LES なし　　(b)LES あり ($C_S = 0.10$)

図－５　$t = 0.34$ s における自由表面形状と圧力分布

3.　数値解析例

数値解析例として，構造物を有する３次元ダムブレイク問題を取り上げ，構造物に作用する流体力を計算し，実験値[4)] との比較を行う．また，Smagorinsky 定数の違いによる計算値の比較を行う．解析モデルを**図－２**に示す．

(1)　解析条件

解析メッシュは，**図－３**に示すように，底面と構造物周辺を細かくした，節点数 1,224,746，要素数 7,029,070，最小メッシュ幅 1.27×10^{-3} m の四面体メッシュを用いる．境界条件として，壁面と構造物周りに Slip 条件を与える．微小時間増分量は，0.001 s とする．Smagorinsky 定数 C_S は，0.10，0.15，0.20 の３ケースとする．

液体，気体の密度はそれぞれ 1000 kg/m^3，1.0 kg/m^3，粘性係数は 1.00×10^{-3} Pa·s，1.00×10^{-5} Pa·s とする．

(2)　解析結果

図－４に構造物に働く x 方向の流体力の時刻歴を示す．Smagorinsky 定数の違いによる比較を行うと，大きな差異はみられないが，Smagorinsky 定数が大きいほど，遅れが生じ流体力の大きさは小さくなる結果が得られた．LES の有無による比較を行うと，LES を導入した計算結果は，導入しない計算結果と比較して，実験値に近い値が得られ，振動が小さくなった．また，各計算値における流体力の最大値に差異はみられないが，実験値より大きい値となった．

次に，流体力が最大である $t = 0.34$ s における自由表面形状と圧力分布の計算結果を**図－５**に示す．LES の導入により，水面の振動が小さくなる結果が得られた．

4.　おわりに

本研究では，LES を用いた安定化有限要素法による自由表面流れの解析手法に着目し，構造物に作用する流体力を計算した結果，以下の結論を得た．

- Smagorinsky 定数の違いによる流体力の計算値の比較において，大きな差異はみられないが，Smagorinsky 定数が大きいほど，遅れが生じ，流体力の大きさは小さくなる結果が得られた．
- LES の有無による比較において，LES の導入により，水面振動が小さくなり，流体力の計算値は実験値に近い結果が得られた．

今後は，流体 - 構造連成解析手法の導入について検討する予定である．

参考文献

1) Smagorinsky, J.: General circulation experiments with the primitive equations, *Monthly Weather Review*, 91, 3, (1963), 99-164
2) 桜庭雅明，弘崎聡，樫山和男: 自由表面流れ解析のための CIVA/VOF 法に基づく高精度界面捕捉法の構築，応用力学論文集，6, (2003), 215-222
3) Hirt, C.W.& Nichols, B.D.: Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries, *Journal of Computational Physics*, 39, (1981), 201-225
4) Gomez-Gesteira, M. & Dalrymple, R.A.: Using a three-dimensional smoothed particle hydrodynamics method for wave impact on a tall structure, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 130, (2004), 63-69