安定化有限要素法による津波遡上解析における移動境界手法に関する検討

中央大学 学生員 ○ 花澤 広貴
(株) エイト日本技術開発 正会員 大川 博史
中央大学 正会員 樫山 和男

1. はじめに

2011 年に発生した東北地方太平洋沖地震に伴う津波によって, 沿岸地域は甚大な被害を受け, 津波による被害を事前に予測することの重要性が再認識された. 津波の数値シミュレーションにおいては, 遡上域での浸水深や構造物に働く流体力などをより正確に予測することが求められており, その高精度化を図ることは重要である. 遡上域では移動境界手法[1)]が用いられているが, この手法が遡上領域での解の精度に与える影響は大きい.

そこで本研究では, 安定化有限要素法を用いた津波遡上解析における移動境界手法の検討を行うことを目的とする. 支配方程式には Boussinesq 方程式を用い, 離散化手法には, 空間方向に SUPG 法に基づく安定化有限要素法[2)] を, 時間方向に Crank-Nicolson 法を用いる. 数値解析例として, 障害物を有するダムブレイク問題[3)] を取り上げ, 本手法の妥当性を検討する.

2. 数値解析手法

(1) 支配方程式

支配方程式には，以下に示す非線形性と分散性を考慮した Boussinesq 方程式（非線形分散波方程式）を用いる.

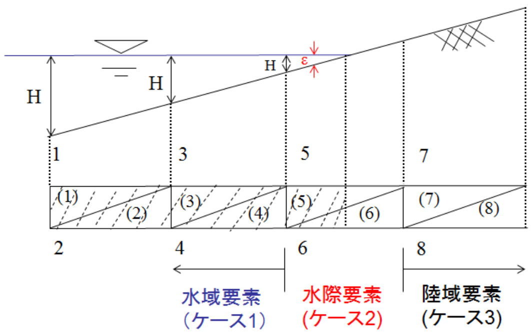
$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_i} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}\left(\mathbf{N}_{ij}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}_j}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial \mathbf{x}_i}(\mathbf{K}) + \mathbf{R} - \mathbf{G}\mathbf{U} \qquad (1)$$

ここで，$\mathbf{U}$ は未知数ベクトルであり，$\mathbf{K}$，$\mathbf{R}$，$\mathbf{A}_i$，$\mathbf{N}_{ij}$，$\mathbf{G}$ はそれぞれ分散項，水底勾配項，移流項，拡散項，摩擦項に対する行列である.

支配方程式 (1) に対して，空間方向の離散化として三角形一次要素を用い，SUPG 法に基づく安定化有限要素法を適用すると以下に示す弱形式が得られる.

$$\int_\Omega \mathbf{U}^* \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} + \mathbf{G}\mathbf{U} - \mathbf{R}\right) d\Omega + \int \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_i}\right) \cdot \left(\mathbf{N_{ij}}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{K})\right) d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau (\mathbf{A}_i)^T \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_i}\right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} + \mathbf{G}\mathbf{U} - \mathbf{R}\right) d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \delta \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_i}\right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i}\right) d\Omega = 0 \qquad (2)$$

式 (2) 中の第一項と第二項は Galerkin 項，第三項は SUPG 項，第四項は衝撃捕捉項であり，SUPG 項によって移流項の卓越を抑え，衝撃捕捉項によって不連続面での数値不安定性を抑える．時間方向の離散化として，2 次精度を有する Crank-Nicolson 法を用い，連立一次方程式の解法には，Element-By-Element Bi-CG STAB 法を用いる．



図－1 移動境界の概念図

(2) 移動境界手法

移動境界手法は, 固定メッシュに基づく Euler 的手法と移動メッシュに基づく Lagrange 的手法があるが, 本研究では任意形状への適合性に優れた Euler 的手法を用いる．各要素の陸水判定のために, 微小水深 ε を設定し, 以下に示すように全水深 H と微小水深 ε を比較し判定を行っていく．

a) 従来法

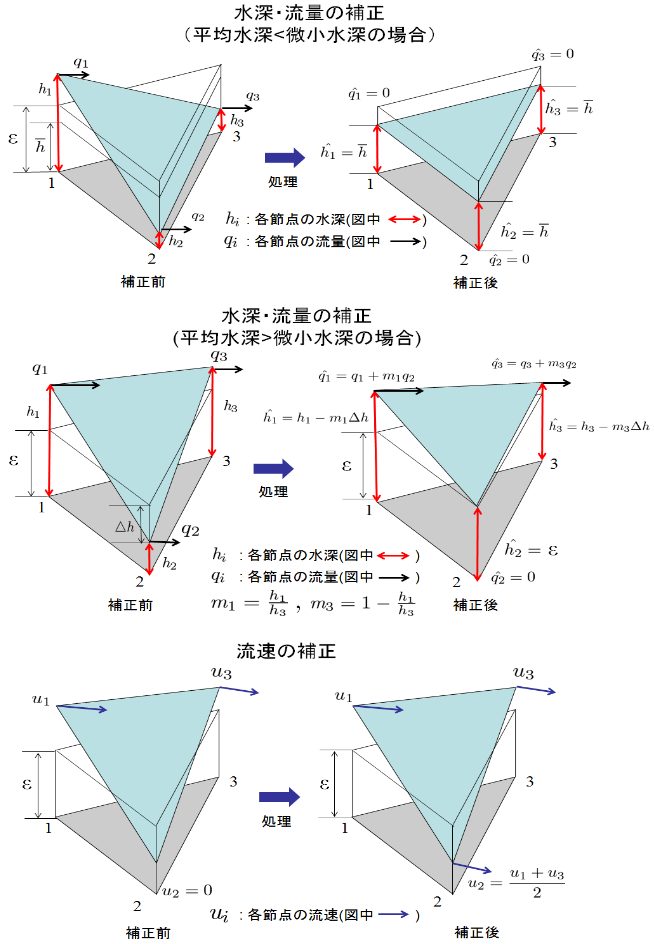
- ケース 1
  図-1 中 (1)〜(4) の要素のように, 全ての節点の全水深が微小水深以上なら, その要素を水域要素とし, 処理は行わない.
- ケース 2
  図-1 中 (5),(6) の要素のように, 一つもしくは二つの節点の全水深が微小水深以上なら, その要素を水際要素とし, 陸域節点の流速を 0 とする.
- ケース 3
  図-1 中 (7),(8) の要素のように, 全ての節点の全水深が微小水深未満なら, その要素を陸域要素とし, 節点の流速を 0 とする.

b) 本手法

本手法では, 従来法と比較して水際要素 (ケース 2) のみにおいて, 以下に示す補正を行った. なお, **図-2** において，ε は微小水深, $\overline{h}$ は要素の平均水深, q_i は流量, u_i は流速, m_i は水域節点での水深の重みである.

- 要素の平均水深が微小水深未満のとき
  図-2 に示すように, 全ての節点の水深を平均水深とし, 流量を 0 とする. なお, この要素は陸域要素とする.

KeyWords： 安定化有限要素法，Boussinesq 方程式，移動境界手法
連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL：03-3817-1815 E-mail：hanazawa@civil.chuo-u.ac.jp



図－2　本手法の説明

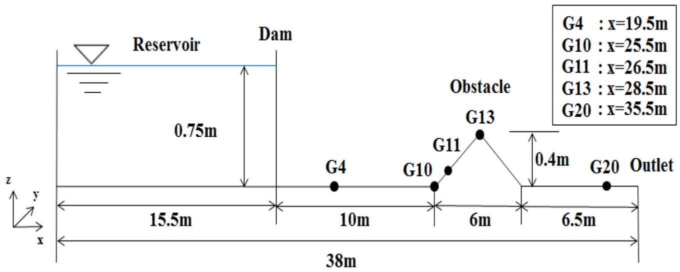
- 要素の平均水深が微小水深以上のとき
  図-2 に示すように, 微小水深以下の節点の全水深を微小水深とする. この時の増加量を Δh とし, 微小水深以上の節点の水深から差し引く. 既往の研究[4]では, 水域節点が二つ存在する場合は, 陸域節点の流量を水域節点に均等に差し引いていた. 本研究では水域節点が二つ存在する場合, その二つの水深の比に応じて差し引く. 流量に関しても水深処理と同様の方法で陸域節点の流量を水域節点に配分する.

また, 陸域節点に水域節点の流速の平均値を与える.

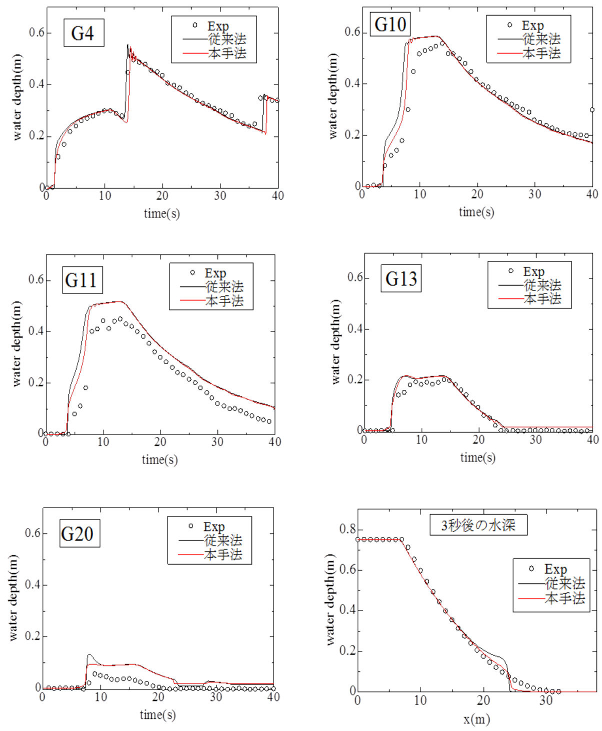
3.　数値解析例

本手法の妥当性の検討を行うため，障害物を有するダムブレイク問題を取り上げる. **図-3** に示すように, 初期水位を与え, 境界条件として slip 条件を適用する. また, 5 個の観測点を設け, 水深の時刻歴をとった. メッシュ幅は 0.25m, 微小時間増分量は 0.01s, 微小水深は $\varepsilon = 1.7\times10^{-2}$m, マニングの粗度係数は $n = 0.0125\mathrm{s/m}^{\frac{1}{3}}$ とした.

各観測点における水深の時刻歴及び 3 秒後における水深を **図-4** に示した. 本手法の結果は, 従来法に比べて実験値とよい一致を示していることがわかる. また, 流速の補正を行ったことで, 水際先端での水面の盛り上がりが改善されていることがわかる. これは, 行列の重ね合わせの際に流速 0 を含んでいないため, 流速の減少が抑えられているためと考えられる.



図－3　数値解析モデル



図－4　各観測点における水深の時刻歴と 3 秒後の水深

4.　おわりに

本研究では, 安定化有限要素法による津波遡上解析の高精度化のため, 移動境界手法の改善を行い, その妥当性を検討した. 移動境界手法において, 水際要素の水深, 流量及び流速を補正したことで, 従来法に比べて厳密解とよい一致を示した.

今後の課題として, 本手法を実地形問題へ適用すること, また更なる移動境界手法の検討などが挙げられる.

参考文献

1) 松本　純一, 梅津　剛, 川原　睦人 : 陰的有限要素法による浅水長波流れと河床変動解析, 応用力学論文集, Vol.1, pp.263-272,1998
2) T.E.Tezduyar : Stabilized finite element formulation for incompressible flow computations, *Advances in Applied Mechanics*, 28, pp.1-44, 1991
3) P.Brufau, M.E.Vazquez-Cendon, P.Garcia-Navarro : A numerical model for the flooding and drying of irregular domains, *Fluid Mechanics*, 39, pp.247-275, 2002
4) S.Bunya, E.J.Kubatko, J.J.Westerink and C.Dawson : A wetting and drying treatment forequations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198, pp.1548-1562, 2009