

安定化有限要素法に基づく2次元・3次元ハイブリッド津波解析モデルの構築

中央大学大学院 学生員 ○ 凌 国明
産業技術総合研究所 正会員 松本 純一
中央大学 正会員 櫻山 和男

1. はじめに

地震によって発生する津波は、沿岸域の人命や財産に甚大な被害をもたらす。数値シミュレーションを用いて津波現象を把握することは、防災・減災対策上重要であり、その効率化と高精度化が求められている。また、津波解析を高精度かつ合理的に行うには、波源域を含む沖合から海岸近くまでは浅水長波方程式に基づく2次元解析手法が、海岸近くから構造物のある津波遡上域は Navier-Stokes 方程式に基づく3次元解析手法が有効である。

そこで、本論文では、両手法を一体化して解く2次元・3次元ハイブリッド津波解析モデルの構築を行うことを目的とするものである。なお、離散化手法としては任意形状への適合性に優れた安定化有限要素法¹⁾を用いる。数値解析例として、段波問題を取り上げ、その妥当性の検討を行う。

2. 数値解析手法

(1) 支配方程式

本解析手法では、2次元・3次元ハイブリッド解析のための支配方程式として、2次元浅水長波方程式と3次元 Navier-Stokes 方程式を用いる。

2次元解析のための浅水長波方程式 (1) と連続式 (2) を以下に示す。

$$\frac{\partial(U_i H)}{\partial t} + \frac{\partial(U_j U_i H)}{\partial x_j} + \nu_e \frac{\partial^2(U_i H)}{\partial x_j^2} + \frac{g n^2 U_i \sqrt{U_j U_j}}{H^{\frac{1}{3}}} + g H \frac{\partial(H+z)}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(U_i H)}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

ここに、 U_i は x_i 方向の断面平均流速である。 H は全水深、 g は重力加速度、 ν_e は渦動粘性係数、 n はマニングの粗度係数、 z は地盤高である。なお、遡上域における移動境界手法として、Euler 的手法²⁾を適用する。

3次元自由表面流れ解析には、VOF 法³⁾を用いる。流れ場の支配方程式である Navier-Stokes 方程式 (3) と連続式 (4)、及び VOF 関数の計算に用いる移流方程式 (5) を以下に示す。

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - f_i \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0 \quad (5)$$

ここで、 ρ は密度、 u_i は流速、 f は物体力、 p は圧力、 μ は粘性係数である。また、VOF 関数 ϕ は自由表面流れにおける界面の位置を表現する界面関数である。ここで、流れ場の計算で求めた流速 u_i を用いた VOF 関数 ϕ についての移流方程式を解くことで自由表面の位置を求めることができる。

(2) 離散化手法

支配方程式 (1) ~ (5) に対して安定化有限要素法を適用し、空間方向の離散化を行う。時間方向の離散化には Crank-Nicolson 法に基づく差分近似を適用する。連立一次方程式の解法には Element-By-Element 処理による Bi-CGSTAB 法を適用する。

(3) 2次元・3次元の結合手法

本研究では、2次元解析領域と3次元解析領域の接続面での適合条件を考慮した2次元・3次元の結合手法を導入した。本手法では、図-1に示すように2次元解析領域と3次元解析領域の一部がお互いに重なっている結合部を設置する。そして、2次元解析により計算された流速と水深を3次元解析領域の流入境界条件とし、同様に、3次元解析により得られた流速と VOF 関数を2次元解析領域の流出境界条件として与える。

解析のフローチャートは図-2に示す。まず、3次元の $n+1$ ステップ目の流速と VOF 関数の近似を式 (6) ~ (9) を用いて行う。

$$u_i^* = \frac{3}{2} u_i^n - \frac{1}{2} u_i^{n-1} \quad (6)$$

$$\phi^* = \frac{3}{2} \phi^n - \frac{1}{2} \phi^{n-1} \quad (7)$$

$$u_i^{n+1} \approx 2u_i^* - u_i^n \quad (8)$$

$$\phi^{n+1} \approx 2\phi^* - \phi^n \quad (9)$$

ここで、 u_i^* 、 ϕ^* は2次精度 Adams-Bashforth 法により陽的に近似し、線形化した流速と VOF 関数である。

次に、求めた u_i^{n+1} 、 ϕ^{n+1} を用いて2次元の流出境界条件を求める。水深と流量の計算には式 (10)、(11) を用いる。

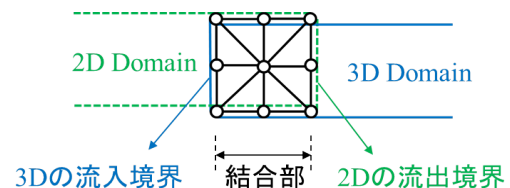


図-1 2次元・3次元解析領域の結合部

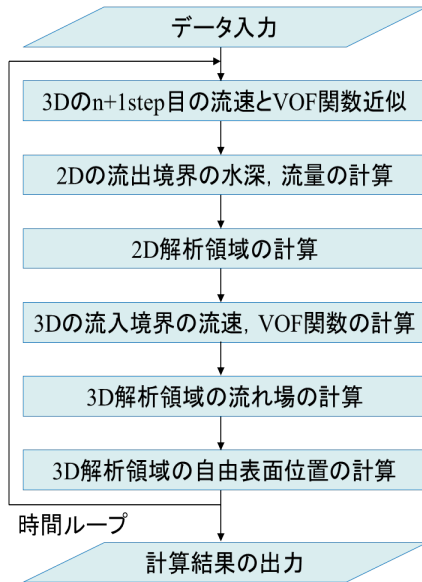


図-2 解析のフローチャート

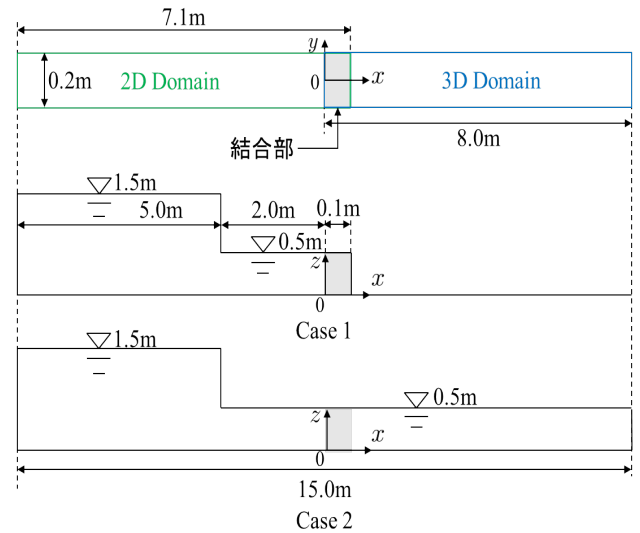


図-4 解析モデル

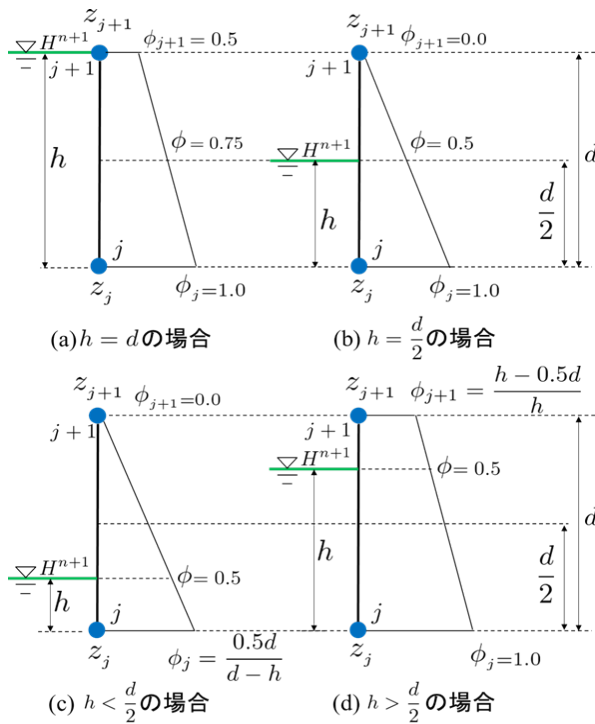


図-3 VOF関数の流入境界条件の計算

$$H^{n+1} = \int \phi^{n+1}(z) dz \quad (10)$$

$$q_i^{n+1} = U_i^{n+1} H^{n+1} = \int \phi^{n+1}(z) u_i^{n+1}(z) dz \quad (11)$$

計算によって求めた水深と流量を2次元の流出境界条件として2次元解析領域の計算を行う。

3次元解析における流速は式(12), (13)を用いて求める。VOF関数の流入境界条件は、図-3に示すように水位と節点の位置関係に応じて計算する。

$$u_i^{n+1} = U_i^{n+1} = \frac{q_i^{n+1}}{H^{n+1}} \quad (12)$$

$$w^{n+1} = 0 \quad (13)$$

最後に、3次元解析流域の流入境界条件を求めた後、3次元解析領域の流れ場の計算及び自由表面位置の計算を行う。

以上で述べたような手順を計算ステップごとに繰り返していくことで、2次元・3次元ハイブリッド津波解析を進める。

3. 数値解析例

本手法の定性的な妥当性を検討するために、数値解析例として、図-4に示す2つの段波問題を扱う。解析領域の左端から7.1mを2次元解析領域とし、右端から8.0mを3次元解析領域とする。0.0m ≤ x ≤ 0.1mに2次元・3次元ハイブリッド解析のための結合部を設置する。接続面を除く境界上Slip条件を与える。微小時間増分量は0.001sとする。水、空気、密度と粘性係数はそれぞれ、 $\rho_l = 998.0 \text{ kg/m}^3$, $\rho_g = 1.205 \text{ kg/m}^3$, $\mu_l = 1.01 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $\mu_g = 1.81 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ を与える。

なお、本解析例の解析結果については、講演時に述べる。

4. おわりに

本研究では、浅水長波方程式とNavier-Stokes方程式を用いた2次元・3次元ハイブリッド津波解析モデルの構築を目的とし、定式化を行った。

今後の課題として、2次元・3次元ハイブリッド津波解析モデルの定量的な精度検証を行うことが挙げられる。

参考文献

- 1) Takase, S., Kashiwayama, K., Tanaka, S., and Tezduyar, T.E.: Space-time SUPG formulation of the shallow-water equations, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 64, 2010, pp. 1379-1394.
- 2) Kawahara, M., and Umetsu, T.: Finite Element Method for moving boundary problems in river flow, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 6, 1986, pp. 365-386.
- 3) Hirt, C.W., and Nichols, B.D.: Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries, *Journal of Computational physics*, 39, 1981, pp. 201-225.