

遠方場近似を利用した き裂開閉口に伴い発生する高調波の3次元解析

群馬大学大学院理工学府

群馬大学大学院理工学府

東京工業大学大学院情報理工学研究科

東京工業大学大学院情報理工学研究科

学生会員 ○金井翔平

正会員

斎藤隆泰

学生会員

丸山泰蔵

正会員

廣瀬壮一

1. はじめに

近年, 超音波非破壊検査の分野では, 閉じたき裂の検出に高調波と呼ばれる非線形波動を利用する試み (非線形超音波法) が提案され, 話題となっている. しかしながら, 非線形超音波法の定量化にはその高調波の発生機構を明らかにする必要がある. そこで, 本研究では, 遠方場近似を利用して, き裂開閉口に伴い発生する高調波をシミュレーションすることを行う. 遠方場近似の導入により, 遠方での弾性波の振る舞いを精度良く, 効率的に求めることが可能となる. 以下では, まず, 演算子積分時間領域境界要素法¹⁾を用いてき裂開口変位を求める. 次に, 基本解の遠方場近似を利用することで, き裂からの遠方散乱場を求めることで, 高調波の発生について確認する.

2. 解くべき問題

図1(a)のような3次元等方均質な無限弾性体 V 中のき裂による入射波の散乱問題について考える. 今, き裂は, x_1 - x_2 面内にあると仮定し, x_3 軸はき裂面に直交するものとする. 通常のき裂では, き裂の上下面 S^+ , S^- (以下, 上付き $\pm$ はそれぞれき裂の上下面を示す) の接触を考慮せず, 表面力成分 $t_i^{\pm}(\mathbf{x}, t)$ は常にゼロとする. しかしながら, 本研究では, き裂に対し, 後に説明する接触境界条件を与えることで, き裂面が閉じた場合, すなわち $t_i^+ = t_i^-$ なる場合をも考慮する.

3. 演算子積分時間領域境界要素法

文献¹⁾を参考に, 接触を考慮した場合の表面力境界積分方程式は次のように表される.

$$t_i(\mathbf{x}, t) = t_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \int_S W_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * \phi_j(\mathbf{y}, t) dS_y \quad (1)$$

ここで, $\phi_j(\mathbf{y}, t)$ はき裂開口変位, $*$ は畳込み積分を表す. また, $t_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$ は入射波 $u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$ に対応する表面力成分, $W_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ は3次元弾性波動問題における基本解の2階微分を含む超特異核である. 式(1)に正則化を施した式に, 時間に関しては演算子積分法を, 空間に関しては区分一定要素を用いて離散化することで, き裂開口変位 $\phi_i(\mathbf{x}, t)$ を求めることができる.

4. 接触境界条件

き裂の開閉口を表現するために, 本研究では, 簡単のため, 図2のような separation と stick の2つの接触状態について

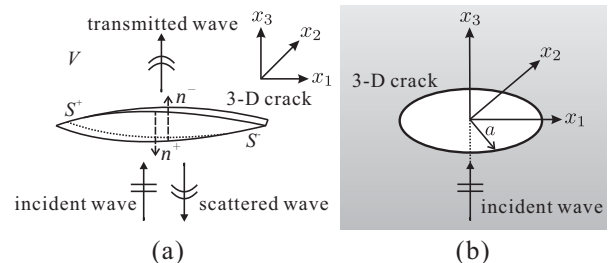


図1 3次元き裂 (a) 解くべき問題 (b) 円形き裂.

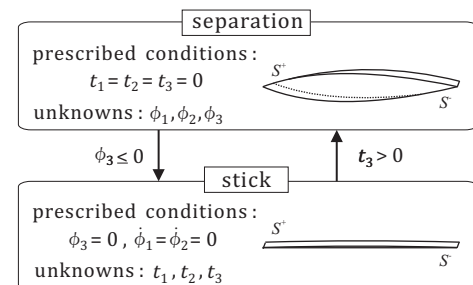


図2 接触境界条件.

考慮する. separation 状態は, 図2上のように, 向かい合うき裂面 S^+ , S^- が非接触, すなわち開口状態であるとして定義する. これより, separation 状態における接触境界条件は次のように与えられる.

$$t_1 = t_2 = t_3 = 0 \quad (2)$$

一方, stick 状態は, 図2下のように, 向かい合うき裂面 S^+ , S^- が接触している状態として定義する. この stick 状態では S^+ , S^- での u_1 , u_2 変位の不連続状態を許容している. これより, stick 状態において規定される接触境界条件は次のように与えられる.

$$\phi_3 = 0, \dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2 = 0 \quad (3)$$

ここで, $\dot{\phi}_i$ は $\dot{\phi}_i = \partial \phi_i / \partial t$ である. き裂における接触境界条件は, 各時刻において, separation と stick のいずれかの状態を取り得ると考える. 接触境界条件が遷移する場合の遷移条件を図2中央に矢印と共に示す.

5. き裂による散乱波の遠方場近似

超音波非破壊検査では, 通常, 散乱波は欠陥から十分遠方で受信することとなる. そのため, 散乱波の解析に遠方場近似を導入することで, 遠方での散乱波を短時間で容易に評価することが可能となる²⁾.

Key Words: 超音波非破壊検査, 非線形超音波法, 時間領域境界要素法, 遠方場近似, 高調波

〒376-8515 群馬県桐生市天神町1-5-1 群馬大学大学院理工学府 TEL. 0277-30-1610 E-mail. t14803012@gunma-u.ac.jp

今、観測点 $\mathbf{x}$ を、き裂から十分遠方に設定し、座標原点をき裂近傍にとると、観測点 $\mathbf{x}$ とき裂上の点 $\mathbf{y}$ との距離 r は次式のように近似できる。

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \approx |\mathbf{x}| - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \quad (4)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ である。式 (4) を散乱波 $u_i^{sc}(\mathbf{x}, t)$ に対する積分表現式に代入し、整理すれば³⁾、散乱波の遠方場の縦波成分 $u_L^{sc;far}(\mathbf{x}, t)$ は次式のように求めることができる。

$$u_L^{sc;far}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \Omega_L \left(\hat{\mathbf{x}}, t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_L} \right) \quad (5)$$

ここで、散乱縦波の振幅 $\Omega_L(\hat{\mathbf{x}}, t - |\mathbf{x}|/c_L)$ は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \Omega_L \left(\hat{\mathbf{x}}, t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_L} \right) &= \frac{c_T^2}{c_L^3} \left[\left(\frac{c_L^2}{c_T^2} - 2 \right) \delta_{jk} + 2\hat{x}_j \hat{x}_k \right] \\ &\times \int_S n_k(\mathbf{y}) \dot{\phi}_j \left(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_L} + \frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}}{c_L} \right) dS_y \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 c_L, c_T は縦波および横波の波速であり、 δ_{ij} はクロネッカーデルタである。式 (1) で求めた、き裂開口変位 $\phi_i(\mathbf{x}, t)$ を用いることで、き裂による散乱遠方場の縦波成分 $u_L^{sc;far}(\mathbf{x}, t)$ を求めることができる。

6. 数値解析例

以下、数値解析例を示す。ただし、以下の数値解析では、ポアソン比 $\nu = 0.25$ とした。このとき、縦波、横波の波速比は $c_L/c_T = \sqrt{3}$ となる。

(1) 通常のき裂による弾性波動散乱解析

まず、本手法の計算精度を確認するために、接触境界条件を考慮しない通常のき裂に対し、散乱解析を行った。ここでは、入射波 $u_i^{in}(\mathbf{x}, t)$ を平面波 (縦波) とし、図 1(b) のような原点中心、半径 a の円形き裂に対し、垂直入射させる。図 3 は演算子積分法により求めたき裂開口変位 $\phi_i(\mathbf{x}, t)$ を用いて式 (6) の散乱振幅をプロットした結果を示している。比較のため、Hirose らによる従来の時間領域境界要素法を援用して求めた結果³⁾ も示している。両者は良く一致しており、解析を正しく実行できていることが確認できた。

(2) 接触境界条件を考慮したき裂による弾性波動散乱解析

次に、接触境界条件を考慮したき裂に対し、散乱解析を行った。ここでは、入射波 $u_i^{in}(\mathbf{x}, t)$ を正弦平面波 10 波 (縦波) とし、原点中心、1 辺の長さが $2a$ の正方形き裂に対し、垂直入射させる。図 4 は式 (6) の後方散乱振幅をプロットした結果を示している。また、参考のため、通常のき裂に対する結果も示している。図 4 より、接触境界条件を考慮した場合の結果は、通常のき裂に対する結果に比べて、波形が歪んでいることが見て取れる。一方、図 5 は図 4 における結果のフーリエスペクトルを示している。ただし、縦軸は入射波の

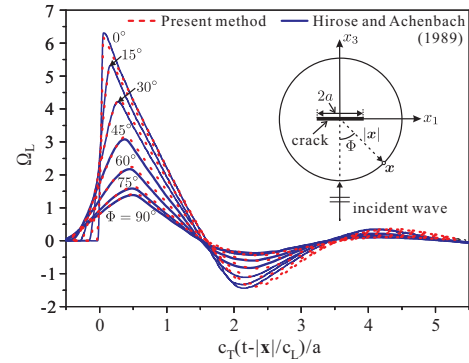


図 3 遠方場近似により求めた散乱振幅の角度変化。

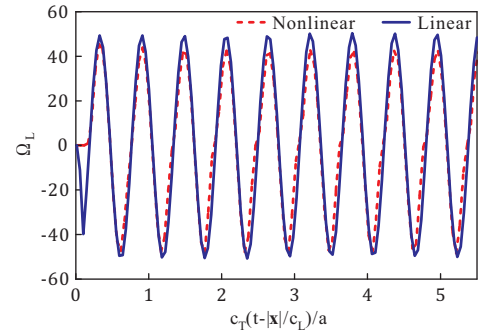


図 4 遠方場近似により求めた後方散乱振幅。

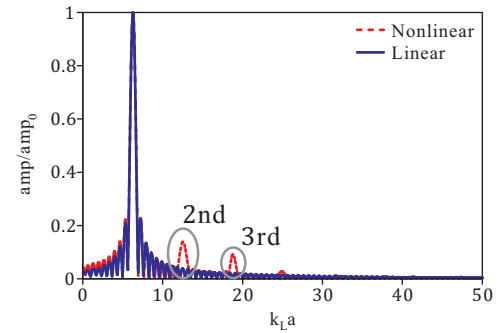


図 5 後方散乱振幅のフーリエスペクトル。

中心周波数に対応する無次元化波数 $k_L a = 2\pi$ のフーリエスペクトル amp_0 で正規化していることに注意されたい。いずれの場合においても、 $k_L a = 2\pi$ でスペクトルのピークが卓越していることがわかる。しかしながら、接触境界条件を考慮した場合の結果に着目すると、 $k_L a = 4\pi, 6\pi$ においてそれぞれ、2 次、3 次高調波を確認することができる。

7. まとめと今後の課題

演算子積分時間領域境界要素法を用いて接触境界条件を考慮した場合のき裂開口変位を求めた。遠方場近似を利用することで、き裂からの遠方散乱場を求め、かつ、高調波の発生について確認した。今後は分調波が発生するようなき裂の動的モデルの検討、異方性材料中の高調波の発生について行う予定である。

参考文献

- 1) 斎藤隆泰・金井翔平・丸山泰蔵・古川陽・廣瀬壮一: 演算子積分時間領域境界要素法を用いた接触境界条件を考慮した 3 次元クラックによる弾性波動散乱解析, 計算数理工学論文集, Vol.14, pp.31-36 (2014).
- 2) 小林昭一編著: 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会 (2000).
- 3) Hirose, S. and Achenbach, J. D.: Time-domain boundary element analysis of elastic wave interaction with a crack, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol.28, pp.629-644 (1989).