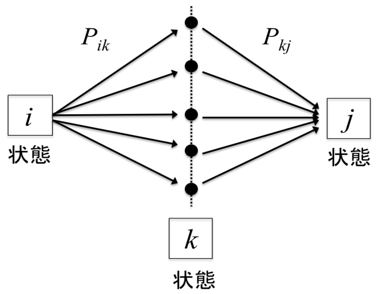
一般的な移流拡散波動方程式の導出

中央大学　　　学生会員　○諸岡　良優
中央大学　フェロー会員　　山田　正

１．はじめに

移流拡散方程式は様々な現象の基礎式である．水理学や気象学における移流拡散方程式は河川や大気中の，流れのある状態での物質の拡散を表す基礎式である．また金融工学においては移流拡散方程式と同じ式形である Black-Scholes 方程式[1)]が株価変動を表す基礎式である．前者は確率的な要素が含まれていない勾配則や保存則といった物理法則から決定論的に導かれるのに対し，後者はランダムな現象であるので確率論的に導かれる．これまでに Chapman-Kolmogorov 方程式[2) 3)]から確率論的に移流拡散方程式が導かれることが知られている．本論文では Chapman-Kolmogorov 方程式から確率論的に移流拡散方程式を導出する過程で，時間に関して従来よりも小さいオーダーまでみることにより移流拡散波動方程式の導出を行った．また，確率論的な移流拡散方程式の導出に決定論を組み込み，新たな移流拡散波動方程式の導出を行った．



P_{ab}　：状態 a から状態 b への遷移確率

図-1　Chapman-Kolmogorov 方程式の計算過程.

２．移流拡散波動方程式の導出

確率論的に移流拡散方程式を導く方法について述べる．Chapman-Kolmogorov 方程式は，未来の状態が現在の状態のみで決定され，それより過去の状態には依らないという Markov 過程における遷移確率が満たす方程式である．図-1 に示す様に，離散状態の Markov 過程の下で状態 i から状態 j へ遷移する確率を P_{ij} とする．P_{ij} は状態 i から任意の状態 k へ遷移する確率 P_{ik} と，そこから状態 j へ遷移する確率 P_{kj} の積の k についての和で表される．つまり，状態 i から状態 j へ遷移する確率は以下の様に表される．

$$P_{ij} = \sum_k P_{ik} \cdot P_{kj} \tag{1}$$

(1)式が Chapman-Kolmogorov 方程式である．次に，連続状態の Markov 過程を考える．時刻 t で位置 x から時刻 s $(s>t)$で位置 y へ遷移する確率密度関数を $p(s,y|t,x)$ とする．$p(s,y|t,x)$は時刻 u $(s \geqq u \geqq t)$での任意の位置 z に対して(1)式より以下の様に表される．

$$p(s,y|t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s,y|u,z) \cdot p(u,z|t,x)\, dz \tag{2}$$

(2)式を連続状態の Chapman-Kolmogorov 方程式という．また(2)式は時刻 s，位置 y における確率密度 $p(s,y)$ と，初期時刻 t，位置 x における確率密度 $p(t,x)$を結ぶ関係として以下の様に表される．

$$p(s,y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s,y|t,x) \cdot p(t,x)\, dx \tag{3}$$

ここで時刻 t，位置 x でのある物理量を $c(t,x)$とする．定常な遷移確率密度関数を $\phi(x)$として，時間増分を τ とすると時刻 $t+\tau$，位置 x での物理量 $c(t+\tau,x)$は(3)式より任意の位置 ξ を用いて以下の式で表される．

$$c(t+\tau,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi)\, c(t,x-\xi)\, d\xi \tag{4}$$

(4)式の左辺の $c(t+\tau,x)$，右辺の $c(t,x-\xi)$を Taylor 展開して２次のオーダーまで考慮すると以下の様になる．

$$c(t,x) + \frac{\partial c}{\partial t}\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial t}\tau^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) \left\{ c(t,x) - \frac{\partial c}{\partial x}\xi + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\xi^2 \right\} d\xi \tag{5}$$

$\phi(\xi)$は遷移確率密度関数であるため $\bar{\xi}$ を遷移距離の期待値(平均値)，σ^2_ξ を遷移距離の分散とすると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi)\, d\xi = 1 \tag{6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi \phi(\xi)\, d\xi = \bar{\xi} \tag{7}$$

キーワード　移流拡散波動方程式，Markov 過程，Chapman-Kolmogorov 方程式
連絡先　〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学理工学部 TEL.03-3817-1805 E-mail：yoshimasa-m@civil.chuo-u.ac.jp

$$\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2\phi(\xi)d\xi=\sigma_{\xi}^2 \tag{8}$$

の関係があるため(6), (7), (8)式を(5)式に代入すると(9)式が得られる.

拡散方程式

$$\frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}+\underbrace{\tau\frac{\partial c}{\partial t}+\overline{\xi}\frac{\partial c}{\partial x}}_{\text{移流方程式}}=\frac{\sigma_{\xi}^2}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{9}$$

波動方程式

(9)式は，左辺第 2 項と左辺第 3 項でみると移流方程式，左辺第 2 項と右辺第 1 項でみると拡散方程式，左辺第 1 項と右辺第 1 項でみると波動方程式であるので(9)式は移流拡散波動方程式であることが明らかである.従来は(9)式を τ について 1 次のオーダーまで考慮し，Chapman-Kolmogorov 方程式から導かれる式は以下に示す移流拡散方程式とされていた.

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\overline{\xi}}{\tau}\frac{\partial c}{\partial x}=\frac{\sigma_{\xi}^2}{2\tau}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{10}$$

３．Chapman-Kolmogorov 方程式の拡張

時刻 t，位置 x における，ある確率的な遷移を伴う物質の濃度 $c(t,x)$が移流速度 v の定常な状態を考えると時刻 $t+\tau$ での Δx 区間の濃度は以下の様に表される.

$$\Delta x\cdot c(t+\tau,x)=\Delta x\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi)c(t,x-\xi)d\xi +\tau\left\{c(t,x)-c(t,x+\Delta x)\right\}v \tag{11}$$

(11)式の右辺第 1 項は区間 Δx に $x=x-\xi$ から確率的に遷移してくる濃度で，右辺第 2 項は τ 時間に移流速度 v で Δx 区間に流出入する濃度 flux の差である．(11)式の右辺は Δx 区間に確率論的に決まる濃度と，移流速度 v によって決定論的に決まる濃度の和であり，確率論と決定論の両方が考慮されている．(11)式の両辺を Δx で割ると以下の様になる.

$$c(t+\tau,x)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi)c(t,x-\xi)d\xi +\frac{\tau}{\Delta x}\left\{c(t,x)-c(t,x+\Delta x)\right\}v \tag{12}$$

(12)式は(4)式の Chapman-Kolmogorov 方程式に移流という決定論を考慮した項が加わった形である．ここで左辺の $c(t+\tau,x)$，右辺の $c(t,x-\xi)$，$c(t,x+\Delta x)$を Taylor 展開して２次のオーダーまで考慮すると(12)式は

$$(\text{左辺})=c(t,x)+\frac{\partial c}{\partial x}\tau+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\tau^2$$

$$(\text{右辺})=c(t,x)\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi)d\xi-\frac{\partial c}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty}\xi\phi(\xi)d\xi +\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2\phi(\xi)d\xi-\tau v\left(\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right)$$

となる．Δx は微小区間であるとし，(6)，(7)，(8)式の関係を考慮すると(12)式の右辺は以下の様になる.

$$(\text{右辺})=c(t,x)-\overline{\xi}\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{\sigma_{\xi}^2}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}-\tau v\frac{\partial c}{\partial x}$$

よって，(12)式は

$$\frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}+\tau\left\{\frac{\partial c}{\partial t}+\left(\frac{\overline{\xi}}{\tau}+v\right)\frac{\partial c}{\partial x}\right\}=\frac{\sigma_{\xi}^2}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{13}$$

となる. (13)式は(9)式と同様の式形であるので移流拡散波動方程式である．(13)式を τ の 1 次のオーダーでみると以下に示す移流拡散方程式となる.

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\left(\frac{\overline{\xi}}{\tau}+v\right)\frac{\partial c}{\partial x}=\frac{\sigma_{\xi}^2}{2\tau}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{14}$$

ここで(9)式と(13)式，(10)式と(14)式を比較すると移流項の係数に、決定論として組み込んだ移流速度 v が加わった形になっていることが明らかである.

４．まとめ

1) Chapman-Kolmogorov 方程式を Taylor 展開して導かれる式は，時間の増分に関して 2 次のオーダーまでみると移流拡散波動方程式であることを明らかにした.

2) Chapman-Kolmogorov 方程式に, 決定論である移流を組み込むことにより拡張した.

3) 拡張した Chapman-Kolmogorov 方程式より導かれる式は一般的な Chapman-Kolmogorov 方程式より導かれる式と比較して，移流項の係数に決定論的に決まる移流速度が加わった形となっていることを明らかにした.

参考文献

1) Black,F and Scholes,M ,"The pricing of options and corporate liabilities", Journal of Political Economy, Vol.81, No.3, pp.637-654, 1973.

2) Chapman,S ,"On the Brownian displacements andthermal diffusion of grains suspended in a non-uniform fluid", Proc. Roy. Soc. Ser. A, Vol.119, pp.34–54, 1928.

3) Kolmogorov,A ,"Ueber die analytischen Methode in der Wahrscheinlichkeitsrechnung" Math. Ann.,Vol.10, pp.415–458, 1931.