回転硬化を考慮した拡張下負荷面モデルによる
繰り返し残留変形解析への時間域均質化法の適用

新潟大学大学院自然科学研究科　学生員　○大窪 和輝
新潟大学大学院自然科学研究科　正会員　紅露 一寛
新潟大学工学部建設学科　正会員　阿部 和久

1.　はじめに

現在，日本では多くの軌道にバラスト道床が採用されている．バラスト道床は，まくらぎの下に層状に敷かれている砕石の集合体であり，列車の繰り返し走行によって沈下の発生・進展が観測される．そのため，軌道の維持管理のためには，バラスト道床の沈下現象のメカニズムの解明や沈下量の定量評価が重要な課題となっている．

本研究室では，弾塑性モデルを用いてバラスト材の繰り返し変形挙動の表現を試み，中でも回転硬化を考慮した拡張下負荷面モデル[1]が有効であることを確認してきた[2]．しかし，バラスト材において，工学的に意味のある変形を得るまでの時間スケールは，荷重繰り返しの時間スケールに比べて非常に大きいため，全ての応力履歴を追跡する解析手法は，計算負荷の増大につながる．

そこで本研究では，バラスト材の繰り返し変形解析の効率化を最終的な目的として，回転硬化を考慮した拡張下負荷面モデル[1]を用いた弾塑性材料の繰り返し変形解析において時間域均質化法[3,4]を適用するための定式化を示す．従来の弾塑性解析の結果との比較を通して本手法の妥当性を検証する．

2.　拡張下負荷面モデル

本研究では，材料の繰り返し変形挙動を回転硬化を考慮した拡張下負荷面モデル[1]を用いて表す．微小変形を仮定し，応力速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ はひずみ速度 $\dot{\varepsilon}$ の加算分解および関連流動則を用いて，次式で与える．

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{E} : (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p),\ \ \dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda}\bar{\boldsymbol{N}}\ \ (\dot{\lambda} > 0) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &E_{ijkl} = (K - \frac{2}{3}G)\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \\ &K = \frac{p + p_{num}}{\gamma},\ G = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)}K,\ p = -\frac{\sigma_{kk}}{3} \end{aligned} \tag{2}$$

ここで，$\bar{\boldsymbol{N}}$ は下負荷面の外向き法線を規定するテンソルであり，ν は Poisson 比，p_{num} および γ は材料パラメータ，δ_{ij} は Kronecker のデルタである．また $\dot{\lambda}$ は正値の比例係数であり，次式で与えられる．

$$\begin{aligned} &\dot{\lambda} = \frac{\bar{N}_{ij}E_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}}{\Lambda + \bar{N}_{ij}E_{ijkl}\bar{N}_{kl}} \\ &\Lambda = \bar{N}_{ij}\bar{a}_{ij} + \bar{N}_{ij}\bar{\sigma}_{ij}\left\{\frac{F'}{F}h - \frac{1}{RF}\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \sigma_{ij}}b_{ij} + \frac{U}{R}\right\} \end{aligned} \tag{3}$$

なお，$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - (1-R)\boldsymbol{s}$ は下負荷面応力である．R は正規降伏面に対する下負荷面の相似比，$\boldsymbol{s}$ は相似中心応力，H は等方硬軟化変数，$\boldsymbol{\beta}$ は回転硬化変数であり，これらの硬化則は次式で与えられる．

$$\dot{H} = \dot{\lambda}h,\ \dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\lambda}\boldsymbol{b},\ \dot{\boldsymbol{s}} = \dot{\lambda}\boldsymbol{z},\ \dot{R} = \dot{\lambda}U \tag{4}$$

ここで，F，h，$\boldsymbol{b}$，$\bar{\boldsymbol{a}}$，U，$\boldsymbol{z}$ は文献[1]の定義に従う．

なお，塑性負荷・除荷状態は，次の式を用いて判定する．

$$\begin{aligned} &\dot{\varepsilon}^p \neq 0 :\ \bar{N}_{ij}E_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} > 0 \\ &\dot{\varepsilon}^p = 0 :\ \bar{N}_{ij}E_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} \leq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

3.　時間域均質化法

時間域均質化法[3,4]とは，応答がマクロ時間スケールの変動成分とミクロの時間スケールの周期的な変動成分により構成される場合に，各スケールの変動成分を分離して考え，スケール間の連成効果を考慮しながら双方の応答を効率的に評価する方法である．

まず，マクロ時間変数 t とミクロ時間変数 τ を定義し，これらの時間スケール間には，ζ をスケール比として $\tau = t/\zeta$ $(\zeta \ll 1)$ なる関係が成り立つものとする．

このとき，評価対象となる物理量 $\boldsymbol{\phi}$ は t と τ の関数とみなせ，次の表現が成り立つ．

$$\boldsymbol{\phi}^{\zeta}(x,t) = \boldsymbol{\phi}(x,t,\tau),\ \dot{\boldsymbol{\phi}}^{\zeta} = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial t} + \frac{1}{\zeta}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \tau} \tag{6}$$

本研究では，$\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{\sigma}$，H，$\boldsymbol{\beta}$，R，$\boldsymbol{s}$ と，それらの関数である $\dot{\lambda}$，h，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{z}$，U が式 (6) の性質を有することとなる．

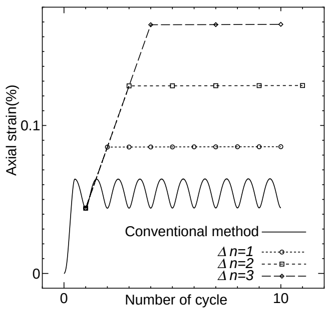
次に，物理量 $\boldsymbol{\phi}$ をスケール比 ζ について漸近展開する．

$$\boldsymbol{\phi}^{\zeta}(x,t) = \sum_{M=0,1,\ldots}^{\infty} \zeta^M \boldsymbol{\phi}^{(M)}(x,t,\tau) \tag{7}$$

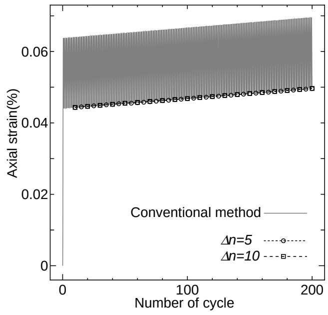
式 (1)-(3) の物理量を式 (7) のように漸近展開し，ζ について項別収束の条件を課した上で，漸近展開の最低次項 $\boldsymbol{\phi}^{(0)}$ のみを考慮する．そして $\boldsymbol{\phi}^{(0)}$ が，マクロ時間変数にのみ依存する変動成分 $\check{\boldsymbol{\phi}}$ と，それ以外の変動成分 $\tilde{\boldsymbol{\phi}}$ に次式のように分解可能であるとする．

$$\boldsymbol{\phi}^{(0)}(x,t,\tau) = \check{\boldsymbol{\phi}}(x,t) + \tilde{\boldsymbol{\phi}}(x,t,\tau) \tag{8}$$

Key Words: バラスト道床，拡張下負荷面モデル，時間域均質化法
連絡先：950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地　TEL 025 (262) 7274 FAX 025 (262) 7274



(a) $n_0 = 1$ の場合.



(b) $n_0 = 10$ の場合.

図 1 各サイクルでの軸ひずみにおける n_0，Δn の影響 (Case1)

その結果，$O(\zeta^{-1})$ の諸式は，ミクロ時間スケールにおける構成則と発展則を次式で与える．

$$\begin{aligned}
&\tilde{\sigma}_{ij,\tau} = E^{(0)}_{ijkl}(\tilde{\varepsilon}_{kl,\tau} - \tilde{\varepsilon}^p_{kl,\tau}),\ \tilde{\varepsilon}^p_{ij,\tau} = \tilde{\lambda}_{,\tau}\bar{N}^{(0)}_{ij} \\
&\tilde{H}_{,\tau} = \tilde{\lambda}_{,\tau}h^{(0)},\ \tilde{\beta}_{ij,\tau} = \tilde{\lambda}_{,\tau}b^{(0)}_{ij} \\
&\tilde{s}_{ij,\tau} = \tilde{\lambda}_{,\tau}z^{(0)}_{ij},\ \tilde{R}_{,\tau} = \tilde{\lambda}_{,\tau}U^{(0)} \\
&\tilde{\lambda}_{,\tau} = \frac{\bar{N}^{(0)}_{ij}E^{(0)}_{ijkl}\tilde{\varepsilon}_{kl,\tau}}{\Lambda^{(0)} + \bar{N}^{(0)}_{ij}E^{(0)}_{ijkl}\bar{N}^{(0)}_{kl}} = \Psi^{(0)}_{kl}\tilde{\varepsilon}_{kl,\tau}
\end{aligned} \tag{9}$$

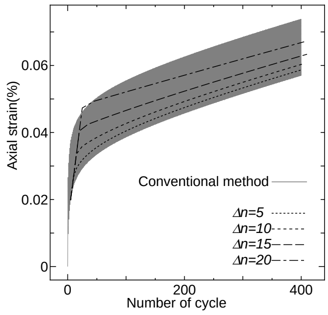
一方，マクロ時間スケールにおける構成則・発展則は，$O(\zeta^0)$ の諸式をミクロ時間スケールの代表長さ τ_0 について時間平均 $\langle\phi\rangle$ し，平均値の定理を適用することで次式のように導出する．

$$\begin{aligned}
\check{\sigma}_{ij,t} + \langle\tilde{\sigma}_{ij}\rangle_{,t} &= \langle E^{(0)}_{ijkl}\rangle(\check{\varepsilon}_{kl,t} - \check{\varepsilon}^p_{kl,t}) \\
&\quad + E^{(0)}_{ijkl}(\tau_1)\langle\tilde{\varepsilon}_{kl}\rangle_{,t} - E^{(0)}_{ijkl}(\tau_2)\langle\tilde{\varepsilon}^p_{kl}\rangle_{,t} \\
\check{\varepsilon}^p_{ij,t} + \langle\tilde{\varepsilon}^p_{ij}\rangle_{,t} &= \langle\bar{N}^{(0)}_{ij}\Psi^{(0)}_{kl}\rangle\check{\varepsilon}_{kl,t} + (\bar{N}^{(0)}_{ij}\Psi^{(0)}_{kl})(\tau_1)\langle\tilde{\varepsilon}_{kl}\rangle_{,t} \\
\check{H}_{,t} + \langle\tilde{H}\rangle_{,t} &= \langle h^{(0)}\Psi^{(0)}_{kl}\rangle\check{\varepsilon}_{kl,t} + (h^{(0)}\Psi^{(0)}_{kl})(\tau_1)\langle\tilde{\varepsilon}_{kl}\rangle_{,t} \\
\check{\beta}_{ij,t} + \langle\tilde{\beta}_{ij}\rangle_{,t} &= \langle b^{(0)}_{ij}\Psi^{(0)}_{kl}\rangle\check{\varepsilon}_{kl,t} + (b^{(0)}_{ij}\Psi^{(0)}_{kl})(\tau_1)\langle\tilde{\varepsilon}_{kl}\rangle_{,t} \\
\check{s}_{ij,t} + \langle\tilde{s}_{ij}\rangle_{,t} &= \langle z^{(0)}_{ij}\Psi^{(0)}_{kl}\rangle\check{\varepsilon}_{kl,t} + (z^{(0)}_{ij}\Psi^{(0)}_{kl})(\tau_1)\langle\tilde{\varepsilon}_{kl}\rangle_{,t} \\
\check{R}_{,t} + \langle\tilde{R}\rangle_{,t} &= \langle U^{(0)}\Psi^{(0)}_{kl}\rangle\check{\varepsilon}_{kl,t} + (U^{(0)}\Psi^{(0)}_{kl})(\tau_1)\langle\tilde{\varepsilon}_{kl}\rangle_{,t} \\
\check{\lambda}_{,t} + \langle\tilde{\lambda}\rangle_{,t} &= \langle\Psi^{(0)}_{kl}\rangle\check{\varepsilon}_{kl,t} + \Psi^{(0)}_{kl}(\tau_1)\langle\tilde{\varepsilon}_{kl}\rangle_{,t}
\end{aligned} \tag{10}$$

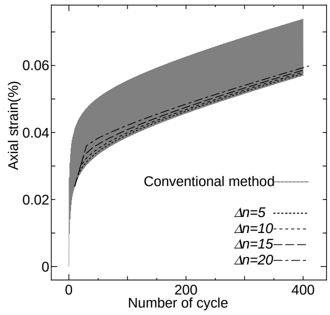
なお，$\tau_1 = \langle\tau\tilde{\varepsilon}_{ij}\rangle/\langle\tilde{\varepsilon}_{ij}\rangle$，$\tau_2 = \langle\tau\tilde{\varepsilon}^p_{ij}\rangle/\langle\tilde{\varepsilon}^p_{ij}\rangle$ である．

4. 定式化の妥当性の検証

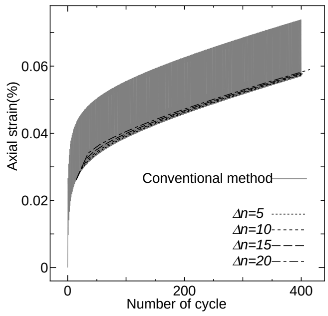
本手法の妥当性を検証するため，石川らによるバラスト材の大型繰り返し三軸試験[5)]を対象に応力解析を行った．応力条件は，拘束圧を $\boldsymbol{\sigma} = -19.6\boldsymbol{I}$(kPa)(引張を正) で一定とし，軸方向のみ -98.0(kPa) まで増加させ，再び軸差応力 0 の状態まで戻す載荷・除荷サイクルを繰り返す．なお，本手法では n_0 サイクルまで通常の弾塑性解析を行い，それ以降で時間域均質化法を適用する．適用後は，ミクロ時間解析を 1 サイクル行い，その結果から Δn サイクル後のマクロ時間応答を評価し，再びミクロ時間解析を行う過程を繰り返す．そのため，Δn を大きな値に設定することで計算負荷の削減につながる．なお，材料パラメータ値は，Case1 では実際のバラスト材に同定された値を用い，Case2 では実現象の再現性を考慮せず残留ひずみの進展特性が Case1 と異なるように調整した値を用いた．



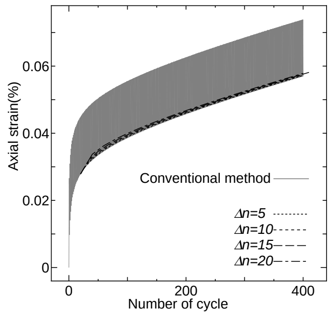
(a) $n_0 = 5$ の場合.



(b) $n_0 = 10$ の場合.



(c) $n_0 = 15$ の場合.



(d) $n_0 = 20$ の場合.

図 2 各サイクルでの軸ひずみにおける n_0，Δn の影響 (Case2)

Case1，Case2 における解析結果をそれぞれ**図 1**，**図 2** に示す．どちらの Case も，サイクル初期の軸ひずみの変化が大きく，このような段階で時間域均質化法を導入した (a) では誤差が生じやすく，特に Δn の値を大きくするほど大きな誤差を生じている．

ただし，Case1 では，2 サイクル目以降では変形挙動に大きな変化がなく，サイクル数に対して概ね線形に残留ひずみが生じている．また，Case2 では，20 サイクル以降で同様の傾向を見ることができる．このように，サイクル数に対して概ね線形に残留ひずみが進展してから時間域均質化法を導入した**図 1**(b)，**図 2**(d) では Δn の値を大きく設定しても大きな誤差が生じにくいことがわかる．

なお，n_0，Δn の設定値により生じる誤差は，ミクロ時間平均のマクロ時間変化率を差分近似で評価していることに起因していると考えられる．

参考文献

1) 橋口公一，上野正実，陳　忠平：下負荷面および回転効果の概念に基づく土の弾塑性構成式，土木学会論文集 No.547/III-36, pp.127-144, 1996.
2) 紅露一寛，阿部和久：有道床バラスト軌道を対象とした繰り返し鉛直・水平載荷試験の弾塑性有限要素解析 J-RAIL2010, pp.565-568, 2010.
3) 紅露一寛，嘉数東陽，阿部和久：鉄道用バラスト材の繰り返し変形解析のための時間域均質化法定式化，土木学会応用力学論文集，Vol.11, pp.149-158, 2008.
4) A.Papon，Z.-Y.Yin，Y.Riou and P.-Y.Hicher : Time homogenization for clays subjected to large numbers of cycles. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*，2012.
5) 石川達也，須長　誠，薫　軍，名村　明：大型繰返し三軸試験による道床バラストの変形特性の検討，土木学会論文集，No.575/III-40, pp.169-178, 1997.