

離散支持された軌道上を走行する車輪の不安定解析

新潟大学大学院自然科学研究科 学生会員 ○千田 雄亮
 新潟大学工学部建設学科 正会員 阿部 和久
 新潟大学大学院自然科学研究科 正会員 紅露 一寛

1. はじめに

列車走行による鉄道軌道の動的応答特性の把握は、列車の走行安定性や地盤振動の低減などの観点から非常に重要である。なお、鉄道軌道はレールと等間隔に配置されたまくらぎによって構成されている。このようなまくらぎ配置により、軌道は周期的な構造を有し、動的応答はその影響を受ける。この周期性により生じる車輪の鉛直振動が車輪・軌道系の共振周波数に一致する時、指数関数的に増幅するパラメータ共振が発生し得る。パラメータ共振に関して、Verichev&Metrikine¹⁾は、変動する連続支持モデルで与えられた軌道上を車輪が走行する場合の解析を行っている。その結果、不安定領域の速度幅は非常に小さいことが示されている。しかし、実際のレールは離散支持されており、それによる軌道剛性の変動は、より顕著になると考えられる。そこで、本研究では、レールがまくらぎに等間隔に離散支持された軌道モデルを対象に、支持モデルが不安定挙動に及ぼす影響を理論的に調べる。

2. 解析手法

(1) 数値モデル

図1のような、車輪・軌道連成系の問題を考える。車輪は質量 m_w の剛な質点として、一定速度 v で走行するものとする。軌道は無限長レールと間隔 L の支持バネ k_r で構成されている。車輪・レール間の接触バネは k_w で与える。

(2) 準定常応答解析手法

Timoshenko ばりでモデル化されたレールの運動方程式の Fourier 変換は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} GAK \frac{\partial}{\partial x} (\hat{\psi} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}) - \rho A \omega^2 \hat{u} + k_r \hat{u} \delta_L(x) &= \frac{1}{v} F(\frac{x}{v}) e^{-i\omega \frac{x}{v}}, \\ GAK (\hat{\psi} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}) - \rho I \omega^2 \hat{\psi} - EI \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 x はレール長手方向座標で、 u はレールたわみ、 ψ は断面回転角、 ρ, A, I はレールの質量密度、断面積、断面二次モーメント、 G, K, E はせん断弾性係数、せん断係数、ヤング率、 $\delta_L(x)$ は周期長 L のデルタ関数で、 $(\hat{\cdot})$ は Fourier 変換を意味する。パラメータ共振は、まくらぎ 2 区間の周期に支配される²⁾。よって、車輪・レール間の接触力を、周期長 $2L$ を基準として、次式のような準定常解で表す。

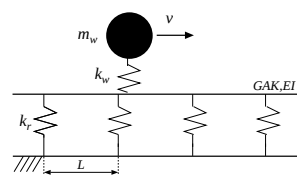


図1 解析モデル

$$F(t + \frac{2nL}{v}) = e^{i\lambda \frac{2nL}{v}} F(t) \quad (2)$$

ここで、 λ は円振動数の次元を持つ複素固有値である。

レールたわみ、断面回転角も式(2)と同様の関係を有し、それぞれ次式を満たす。

$$\begin{aligned} u(x + 2nL, t + \frac{2nL}{v}) &= e^{i\lambda \frac{2nL}{v}} u(x, t) \\ \psi(x + 2nL, t + \frac{2nL}{v}) &= e^{i\lambda \frac{2nL}{v}} \psi(x, t) \end{aligned} \quad (3)$$

すると、レールたわみの Fourier 変換は次式を満たす。

$$\hat{u}(x, \omega) = e^{i\frac{\omega - \lambda}{v} 2nL} \hat{u}(x + 2nL, \omega) \quad (4)$$

$\hat{\psi}$ も同様の関係を有する。

式(2)を満たす様に F を Fourier 級数で与える。

$$F(t) = \sum_n F_n e^{i(\frac{n\pi}{L} + \frac{\lambda}{v})x} \quad (5)$$

ただし、 F_n は Fourier 係数である。

$F_n=1, F_m=0(m \neq n)$ の下で、式(4)を満たす解 u_n, ψ_n の Fourier 変換を次式のように展開する。

$$\begin{aligned} \hat{u}_n(x, \omega) &= \sum_m a_m^n(\omega) e^{i(\frac{m\pi}{L} - \frac{\omega - \lambda}{v})x} \\ \hat{\psi}_n(x, \omega) &= \sum_m b_m^n(\omega) e^{i(\frac{m\pi}{L} - \frac{\omega - \lambda}{v})x} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 a_m^n, b_m^n は Fourier 係数で ω の関数である。

なお、 $\hat{u} \delta_L$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{u} \delta_L &= \frac{1}{L} \sum_m a_{2m}^n(\omega) e^{i(\frac{2m\pi}{L} - \frac{\omega - \lambda}{v})x} \\ &+ \frac{1}{L} \sum_m a_{2m-1}^n(\omega) e^{i(\frac{2m-1\pi}{L} - \frac{\omega - \lambda}{v})x} \end{aligned} \quad (7)$$

式(5),(6),(7)を式(1)に代入して、 b_{2m}^n, b_{2m-1}^n を消去し、 a_{2m}^n, a_{2m-1}^n についてまとめると次式を得る。

$$a_{2m}^n = \frac{1}{vX_{2m}} \left(\delta_{n,2m} - \frac{1}{X_{2n} \left(\frac{k_r}{L} \sum_l \frac{1}{X_{2l}} \right)} \right) \quad (8)$$

$$a_{2m-1}^n = \frac{1}{vX_{2m-1}} \left(\delta_{n,2m-1} - \frac{1}{X_{2n-1} \left(\frac{k_r}{L} \sum_l \frac{1}{X_{2l-1}} \right)} \right) \quad (9)$$

ただし, $X_m(\omega)$ は既知な ω の関数である.

式(8),(9)を式(6)に代入し, 逆 Fourier 変換すると, 車輪直下のレールたわみが次式により与えられる.

$$u^b(t) = \sum_n \sum_m \{ F_{2n} A_{2m}^{2n} e^{i(\frac{2m\pi v}{L} + \lambda)t} + F_{2n-1} A_{2m-1}^{2n-1} e^{i(\frac{(2m-1)\pi v}{L} + \lambda)t} \} \quad (10)$$

ここで, A_m^n は次式で定義される.

$$A_m^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_m^n d\omega \quad (11)$$

一方, 車輪変位 w は次式で与えられる.

$$w(t) = \sum_m \frac{F_m}{m_w \left(\frac{m}{L} \pi v + \lambda \right)^2} e^{i(\frac{m}{L} \pi v + \lambda)t} \quad (12)$$

(3) 不安定解析

式(5),(10),(12)を車輪・レール間の接触力 $F = k_w(w - u^b)$ に代入し, 次の無限連立方程式を得る.

$$\left[1 - \frac{k_w}{m_w \left(\frac{2n}{L} \pi v + \lambda \right)^2} \right] F_{2n} + k_w \sum_m A_{2n}^{2m} F_{2m} = 0 \quad (13)$$

$$\left[1 - \frac{k_w}{m_w \left(\frac{2n-1}{L} \pi v + \lambda \right)^2} \right] F_{2n-1} + k_w \sum_m A_{2n-1}^{2m-1} F_{2m-1} = 0 \quad (14)$$

式(13),(14)の F に関する係数行列を M_e, M_o とすると, $\{F\} \neq 0$ より次式を得る.

$$\begin{aligned} \det[M_e] &= 0 \\ \det[M_o] &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

式(15)を満たす v と λ により安定, 不安定を判定する.

3. 既往の手法との比較

(1) 解析条件

文献¹⁾を参考に, 図1に示すような, 剛地盤にバネを介して等間隔に離散支持されたレール上を車輪が一定速度で走行する問題を対象とする. ただし, 文献¹⁾ではレールは Euler 梁でモデル化しているため, $GAK \rightarrow \infty, \rho I = 0$ とし Euler 梁の条件に設定している. また, 文献¹⁾ではレール・車輪間は剛接触条件となっているため, 本モデルでも k_w を十分剛に設定する. 文献¹⁾ではレール支持剛性を周期的に変化する弾性基礎として, 次式で与えている.

$$k(x) = k_f \left(1 + \mu \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right) \quad (16)$$

ただし, $k_f = 10^8 \text{ N/m}, \mu = 0.3$ である. 本解析では $k_r = Lk_f$ として与えた. その他の条件を表1に示す.

表1 レールの諸条件

質量密度 (kg/m ³)	7849
断面積 (m ²)	76.87×10^{-4}
断面二次モーメント (m ⁴)	3.055×10^{-5}
ヤング率 (Pa)	2×10^{11}

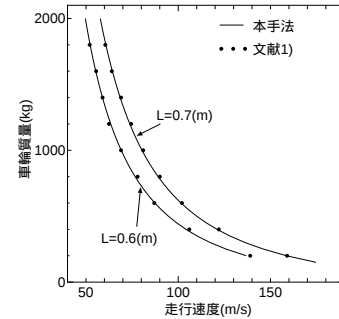


図2 不安定領域の中心速度

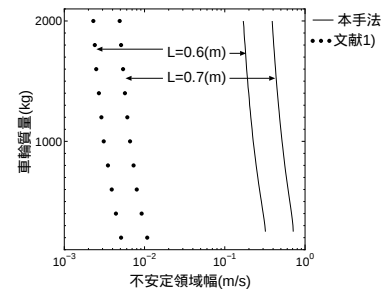


図3 不安定領域幅

(2) 解析結果

解析結果を図2の実線に示す. また, 文献¹⁾の結果を黒点で示した. 本解析と文献¹⁾とで, $L=0.6(\text{m}), 0.7(\text{m})$ ともに不安定領域の中心速度は良好に一致しており, 本解析の妥当性が確認できる. また, 図3に不安定領域の速度幅を示す. 文献¹⁾のような連続支持モデルでは, 不安定領域はごく狭いことがわかる. しかし, 本研究の離散支持モデルにおける解析では, 最大で 0.7 m/s 程度の速度幅が得られており, 不安定領域の速度幅は支持モデルによる影響が大きいことがわかる.

4. おわりに

本研究では, 等間隔離散支持されたレール上を走行する車輪の不安定共振条件を解析的に求めた. 本研究における結果と文献¹⁾の結果との比較を行った結果, レール支持条件の違いが不安定速度幅に大きく影響することがわかった.

参考文献

- 1) S.N.Verichev, A.V.Metrikine: Instability of vibrations of a mass that moves uniformly along a beam on a periodically inhomogeneous foundation, Journal of Sound and Vibration, 260, 901-925, 2003.
- 2) ランダウ, リフシッツ (広重徹, 水戸巖 訳): 力学, 東京図書, 1974.