

2次元非定常熱伝導問題に対する 均質化法を適用した演算子積分時間領域境界要素法

群馬大学

群馬大学理工学研究院

学生会員

正会員

○下田瑞斗

斎藤隆泰

1. はじめに

複数の異種材料で構成される複合材料を解析する際に、均質化法¹⁾²⁾と呼ばれるマルチスケール解析が用いられている。巨視的(マクロスケール)および微視的(ミクロスケール)の2つの異なるスケールで問題を解くことにより、両スケールにおいて連成した力学的な評価が可能になる。均質化法による巨視および微視構造における解析には、これまで主に有限要素法を用いた数値解析が行われてきた。しかしながら、均質化法を時間領域境界要素法に援用した解析例は極めて少ないのが現状である。本研究では、非均質材料に対する非定常熱伝導問題に均質化法を適用し、この均質化されたモデルに対して時間領域境界要素法を援用する。その際、従来の時間領域境界要素法解析に比べて解の安定性を期待できる演算子積分時間領域境界要素法³⁾を用いる。解析例として、非均質材料を直接解析した場合および、均質化されたモデルを解析した場合の両者の結果を比較検討することで、均質化法の有効性を検討する。

2. 均質化法を適用した場合の支配方程式および境界条件・初期条件

図1のようにユニットセルが規則的に並べられた2次元非均質材料に対する非定常熱伝導問題について考える。巨視構造に対する座標系を $\mathbf{x}$ 、非均質性を特徴付ける微視構造のユニットセルに対する座標系を $\mathbf{y}$ とする。2次元非定常熱伝導問題に対する支配方程式は次の拡散方程式で与えられる。

$$\nabla^2 T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\partial t} \quad (1)$$

ここで、 T は時刻 t における非均質材料のマクロスケールでの温度である。また、熱拡散率 α は、 $\alpha = k/(\rho c)$ で与えられ、 k は熱伝導係数、 ρ は密度、 c は比熱である。この問題に対する温度 T 、熱流束 q に関する境界条件、初期条件をそれぞれ次のように与える。

$$\text{境界条件: } \begin{cases} T = \hat{T} & \text{on } \Gamma_1 \\ q = \frac{\partial T}{\partial n} = \hat{q} & \text{on } \Gamma_2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{初期条件: } T = \bar{T} \quad \text{on } \Omega \quad (3)$$

ここで、 Ω 、 Γ は対象とする領域およびその境界であり、 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ である。また、 $\hat{T}$ 、 $\hat{q}$ は与えられた境界条件、 $\bar{T}$ は領域内部の初期温度である。この問題について、均質

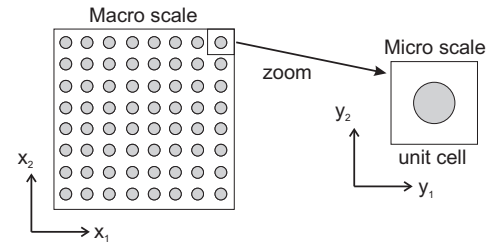


図1 Macro and micro scale for the analysis model.

化法を適用し、温度 $T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ を漸近展開形式の解として次のように与える。

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = T^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \epsilon T^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \epsilon^2 T^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \dots \quad (4)$$

式(4)におけるパラメータ ϵ は、マクロスケールとミクロスケールそれぞれの代表長さの比を表し、 $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\epsilon$ で定義する。式(4)を式(1)に代入することで、ミクロスケールおよび、マクロスケールの支配方程式がそれぞれ以下の式(5)、式(6)のように表される。

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \alpha \left(\frac{\partial T^0(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial T^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y} \right) \right\} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial T^0(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_Y \alpha \left(\frac{\partial T^0(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + \frac{\partial T^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\partial y} \right) dY \right\} \quad (6)$$

ここで、 $T^0(\mathbf{x}, t)$ と $T^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ はそれぞれマクロ温度、ミクロ温度とし、 Y はユニットセルの領域、 $|Y|$ はユニットセルの体積を表している。ミクロスケールの支配方程式から、均質化された熱拡散率を求めると、次式で表される。

$$\alpha^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \alpha \left(1 - \frac{\partial \chi(\mathbf{y})}{\partial y} \right) dY \quad (7)$$

ただし、 $\chi(\mathbf{y})$ は特性関数であり、ミクロ温度 $T^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ とマクロ温度勾配 $\partial T^0(\mathbf{x})/\partial x$ で表される次の式を満たしているとする。

$$T^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\chi(\mathbf{y}) \frac{\partial T^0(\mathbf{x})}{\partial x} \quad (8)$$

3. 非定常熱伝導問題に対する時間領域境界要素法

均質化の後、マクロスケールでの非定常熱伝導問題に対する解析を行う。式(1)-(3)で述べたそれぞれ支配方程式、

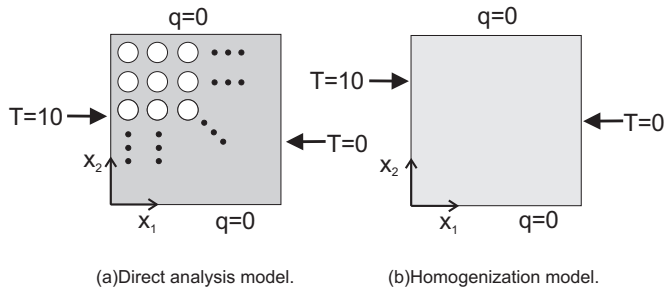


図 2 Analysis models.

境界条件および初期条件より、この問題に対する時間領域境界積分方程式は次のように表される。

$$C(\mathbf{x})T(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\alpha} \left[\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) \bar{T}(\boldsymbol{\xi}) d\Omega_{\boldsymbol{\xi}} \right]_{t=0} + \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) * q(\boldsymbol{\xi}, t) d\Gamma_{\boldsymbol{\xi}} - \int_{\Gamma} S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) * T(\boldsymbol{\xi}, t) d\Gamma_{\boldsymbol{\xi}} \quad (9)$$

ここで、 $\mathbf{x}$ は観測点、 $\boldsymbol{\xi}$ はソース点であり、 $C(\mathbf{x})$ は、観測点に依存する定数で、 $*$ は畳み込み積分を表す。また、 $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ 、 $S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ はそれぞれ 2 次元非定常熱伝導問題に対する基本解および対応する二重層核である。通常、従来法では式 (9) の時間に関する離散化は差分近似で置換えて対応するが、時間増分が小さい場合、数値解が不安定になることが知られている。そのため、本研究では、演算子積分時間領域境界要素法³⁾を用いて式 (9) を解くことを行う。

4. 数値解析例

(1) 直接解析モデルにおける数値解析の設定

まず、図 2(a) のように空洞を有する正方形ユニットセルが規則的に並べられた一辺の長さが $a = 10$ の正方形マクロスケールに対する非定常熱伝導問題を考える。ただし、空洞を通じて熱伝導は行われないことに注意する。また、母材は等方性材料とし、その領域における熱拡散率 α を $\alpha = 10$ とした。マクロスケール内の水平方向、鉛直方向それぞれのユニットセル数を N_x 、 N_y とし、 $(N_x, N_y) = (2, 2)$ 、 $(32, 32)$ の計 2 パターンの配置条件における解析を行った。その際に、いずれの直接解析モデルについてもユニットセル全体に対する空洞含有率が $\pi/16$ となるようにした。

境界条件として、左右の境界にそれぞれ温度 $T = 10$ 、 $T = 0$ を与え、上下の境界は、断熱境界とし熱流束 $q = 0$ を与えた。初期条件は、初期温度 $\bar{T} = 0$ とし、総時間ステップ数 N は $N = 128$ 、時間増分 Δt は $\Delta t = 0.1$ とした。なお、この問題では、式 (9) の離散化に、演算子積分法を用いている。そのため、実際の式 (9) の計算では、時間領域ではなくラプラス変換域での基本解および二重層核を用いて計算を行っていることに注意する。

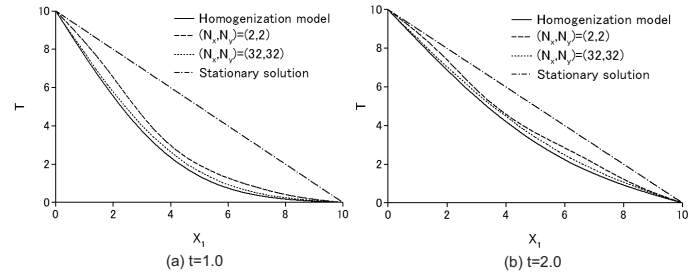


図 3 Analysis results.

(2) 均質化モデルにおける数値解析の設定

次に、ミクロスケールの支配方程式である式 (5) から導いたユニットセル解析結果を利用し、均質化熱拡散率 α^H を求める。このようにして得られた図 2(b) のような均質化モデルに対する 2 次元非定常熱伝導問題を解析する。均質化法により求めた熱拡散率 α^H は $\alpha^H = 6.71$ とし、境界条件、初期条件、演算子積分法におけるパラメータ等の設定値等は前節で述べた直接解析モデルと同様である。

(3) 解析結果

図 3(a)、(b) にそれぞれ時間 $t = 1.0, 2.0$ における $x_2 = 5.0$ (解析モデルの中央水平方向) 上の温度分布を示す。参考のため、この問題に対する定常解 (Stationary solution) も示している。いずれの場合においても、ユニットセル数が増加するにつれ均質化モデルの解析結果に収束していく傾向が見られる。本解析では、ユニットセル数を最大で $(N_x, N_y) = (32, 32)$ 、合計 1024 までの結果を導いたが、ユニットセル数をさらに増加することによって均質化モデルの解析結果に一致すると思われる。なお、この問題では十分に時間が経過すれば、解析結果は定常解に一致する。実際、時間が経過した図 3(b) の場合は、図 3(a) に比べて、定常解に近づいていることが見て取れる。

5. おわりに

2 次元非定常熱伝導問題に対して均質化法を適用した時間領域境界要素解析を行った。直接解析モデルと均質化モデルの解析結果を比較した場合、ユニットセル数の増加につれて直接解析モデルの結果は均質化モデルの解へ正しく収束していることが確認できた。

今後は、本解析の 3 次元非均質問題に対する非定常熱伝導解析への拡張、周期境界条件を適用したマクロ解析などに本手法を応用する予定である。

参考文献

- 1) 寺田賢二郎, 菊池昇著, 日本計算工学会編: 均質化法入門, 丸善株式会社, 2003
- 2) 岡田裕, 福井泰好, 熊澤典良, 境界要素法による均質化法解析 (弾性解析における定式化とコンピュータインプリメンテーション), 日本機械学会論文集 (A 編), 68 巻, 666 号, pp181-188, 2002
- 3) 瀬川尚揮, 斎藤隆泰, 福井卓雄, 演算子積分法を用いた時間領域境界要素法による非定常熱伝導解析, 計算工学講演会論文集, Vol.14, pp489-492, 2009