

VOF法を用いた安定化有限要素法による自由表面流れの精度検証

中央大学 学生員 太田 真貴子
 中央大学大学院 学生員 不室 太希
 中央大学 正会員 櫻山 和男

1. はじめに

わが国の沿岸部では、今後も津波による甚大な被害が予想されるため、浸水被害に加えて構造物の損傷についても検討する必要がある。そして、数値解析手法である有限要素法は要素形状が任意であるので、構造物の幾何形状が複雑である場合でも解析が可能である。

自由表面流れを表現する手法は、界面追跡法と界面捕捉法に分類される。界面追跡法は自由表面近傍のメッシュに歪みが生じ計算が破綻しやすいが、界面捕捉法は計算が破綻しにくく安定して解析を行うことができる。

そこで、本研究では界面捕捉法に着目し、VOF法¹⁾を用いた安定化有限要素法²⁾による自由表面流れの解析手法をとりあげ、その精度検証を行った。具体的には、数値解析例として3次元ダムブレイク問題を取り上げ、境界条件として壁面にSlip条件を与えた場合とNo-Slip条件を与えた場合の計算結果と実験結果の比較を行った。

2. 数値解析手法

(1) 密度・粘性係数の計算

自由表面流れを表現する手法として、メッシュの歪みが生じず計算が破綻しにくい界面捕捉法の一つであるVOF法を用いる。VOF法は、自由表面位置をVOF関数と呼ばれるスカラー関数 ϕ により表現する手法である。VOF関数 ϕ は各節点において、気体であれば0.0、液体であれば1.0、自由表面上であれば0.5の値をとる。各節点における気体、液体の密度と粘性係数は、VOF関数 ϕ を用いて以下の式のように決定できる。

$$\rho = \rho_l \phi + \rho_g (1 - \phi) \quad (1)$$

$$\mu = \mu_l \phi + \mu_g (1 - \phi) \quad (2)$$

ここで、 ρ 、 μ は各要素における密度と粘性係数である。また、 ρ_l 、 ρ_g 、 μ_l 、 μ_g はそれぞれ液体の密度、気体の密度、液体の粘性係数、気体の粘性係数である。

(2) 流速・圧力の計算

非圧縮性粘性流体の支配方程式は、以下に示すNavier-Stokesの運動方程式(3)と連続式(4)で表される。

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - f_i \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (4)$$

ここで、 Ω は境界 Γ で囲まれた解析領域、 u_i 、 p 、 f_i はそれぞれ流速、圧力、物体力である。密度と粘性係数は、VOF

関数を用いた式(1)、(2)から計算した値を用いる。

Dirichlet境界条件およびNeumann境界条件は、それぞれ式(5)、(6)のように示す。

$$u_i = g_i \quad \text{on } \Gamma_g \quad (5)$$

$$\left(-p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) n_j = h_i \quad \text{on } \Gamma_h \quad (6)$$

Γ_g 、 Γ_h はそれぞれDirichlet境界条件およびNeumann境界条件が与えられる境界を表し、 g_i 、 h_i はそれぞれ境界上での流速とトラクション、 δ_{ij} はKroneckerのデルタ、 n_j は外向き単位法線ベクトルを表す。

支配方程式(3)、(4)に対し、空間方向の離散化にはSUPG/PSPG法に基づく安定化有限要素法を適用し、時間方向の離散化には陰解法であるCrank-Nicolson法を適用する。

(3) 自由表面位置の計算

VOF関数は、以下に示す移流方程式(7)と初期条件(8)により支配される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (7)$$

$$\phi = \phi_0 \quad \text{at } t = 0 \quad (8)$$

u_i 、 ϕ_0 はそれぞれ流速、VOF関数の初期値である。 u_i はNavier-Stokesの運動方程式および連続式から計算した値を用いる。

支配方程式(7)に対し、空間方向の離散化にはSUPG法に基づく安定化有限要素法を適用し、時間方向の離散化には陰解法であるCrank-Nicolson法を適用する。

3. 数値解析例

数値解析例として、3次元ダムブレイク問題を取り上げ、計算結果と実験結果^{3) 4)}の比較を行う。解析モデルを図-1に示す。境界条件として、壁面にSlip条件を与えた場合とNo-Slip条件を与えた場合を検討する。また、水流先端位置は図-2に示す2ケースで計測を行い、結果の比較を行う。

(1) 解析条件

解析メッシュは、表-1に示す2種類の四面体構造格子を用いる。微小時間増分量は、 $\Delta t = 0.001$ sとする。

液体、気体の密度はそれぞれ1000 kg/m³、1.0 kg/m³、粘性係数は1.00 × 10⁻³ Pa·s、1.00 × 10⁻⁵ Pa·sとする。

(2) 解析結果

図-3にメッシュAを用いた水流先端位置の時間変化を示す。Slip条件の計算値は、実験値と比較すると差異が生じているが概ね近い結果が得られ、水流先端位置(a)と水流

KeyWords: VOF法, 安定化有限要素法, SUPG/PSPG法, Navier-Stokes運動方程式

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL. 03-3817-1815 Email: otamkk@civil.chuo-u.ac.jp

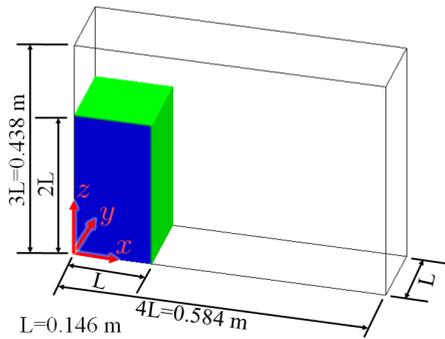


図-1 解析モデル

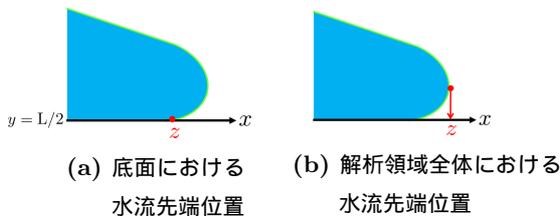


図-2 水流先端位置の取り方

表-1 解析メッシュ

メッシュ	領域分割数 (x × y × z)	節点数	要素数
A	120 × 30 × 90	341,341	1,944,000
B	240 × 60 × 180	2,660,881	15,552,000

先端位置 (b) における結果は一致した。また, No-Slip 条件の計算値は, 水流先端位置 (a) における計算値で実験値より小さい値となったが, 水流先端位置 (b) の計算値で Slip 条件の値と一致する結果が得られた。

次に $t = 0.2$ s における自由表面形状と圧力分布の計算結果を図-4に示す。図-4(a), (b)より, Slip 条件と No-Slip 条件での計算結果を比較すると, No-Slip 条件での計算結果は壁面付近で自由表面位置の遅れが生じている。また, 図-4(b), (c)より, メッシュの領域分割数の違いによる計算結果の違いはみられなかった。図-4(a), (d)より, 計算結果は実験結果と概ね一致した。

4. おわりに

本研究では, VOF 法を用いた安定化有限要素法による自由表面流れの解析手法に着目し, 壁面での境界条件の差異が計算結果に与える影響について検討した結果, 以下の結論を得た。

- 水流先端位置の検討において, Slip 条件の計算結果は, No-Slip 条件の計算結果を比較すると水流先端位置 (a) における時間変化は一致しなかったが, 水流先端位置 (b) における時間変化は一致し実験結果に近い結果となった。
- 自由表面形状の検討において, Slip 条件の計算結果は, No-Slip 条件の計算結果と比較すると実験結果に近い結果となった。

今後は, 流体 構造連成解析手法について検討する予定である。

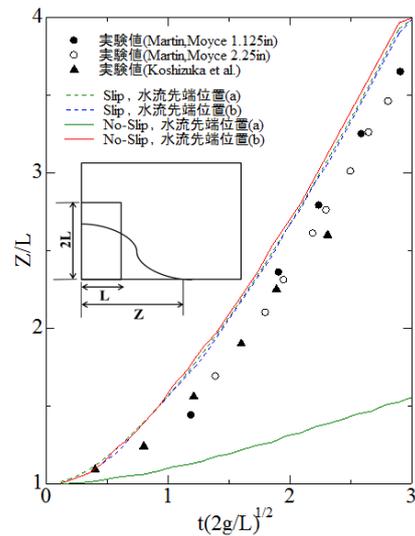
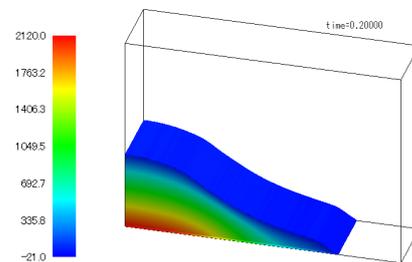
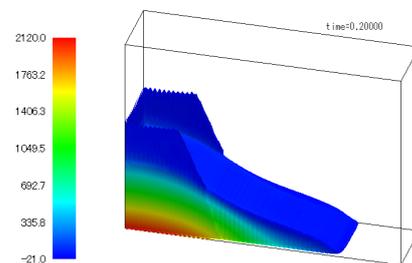


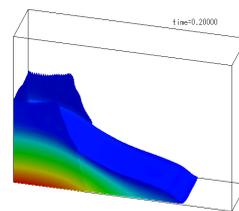
図-3 水流先端位置における時間変化 (メッシュ A)



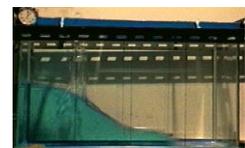
(a) Slip, メッシュ A



(b) No-Slip, メッシュ A



(c) No-Slip, メッシュ B



(d) 越塚らの実験写真

図-4 $t = 0.2$ s における自由表面形状と圧力分布

参考文献

- 1) Hirt, C.W. & Nichols, B.D.: *Journal of Computational Physics*, 39, (1981), 201-225
- 2) Tezduyar, T.E.: *Advances in Applied Mechanics*, 28, (1992), 1-44
- 3) Martin, J.C. & Moyce, W.J.: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 244, 882, (1952), 312-324
- 4) Koshizuka, S., et al.: *Computational Fluid Dynamics Journal*, 4, 1, (1995), 29-46