CIVA-安定化有限要素法による津波解析の高精度化に関する検討

中央大学大学院　学生員　○ 高橋　佑典
中央大学　正会員　樫山　和男
日本工営　正会員　桜庭　雅明

1. はじめに

地震に伴い発生する津波は，到達する地域の人命や経済活動に深刻な被害をもたらす．これらの被害を数値シミュレーションにより予測することは，防災・減災対策上の観点から非常に重要であり，高精度な浸水被害の予測が求められる．また，複雑な地形を対象とする解析においては，任意形状への適合性に優れる，非構造格子に基づく解析手法は有効であるといえる．

そこで，本論文では，離散化手法に CIVA-安定化有限要素法 [1] を適用し，安定化有限要素法で用いる衝撃捕捉項についての検討を行い，解析の高精度化を目的とするものである．数値解析例として，段波問題，孤立波伝播問題を取り上げ，計算結果と厳密解及び実験値との比較を行うことにより，その有効性，妥当性の検討を行った．

2. 数値解析手法

(1) 支配方程式

支配方程式として，以下に示す非線形分散波理論に基づく Boussinesq 方程式を用いる．

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial(u_iH)}{\partial x_i}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial(u_iH)}{\partial t}+u_j\frac{\partial(u_iH)}{\partial x_j}+(u_iH)\frac{\partial u_j}{\partial x_j}+gH\frac{\partial(H+z)}{\partial x_i}+\frac{gn^2u_i\sqrt{u_ju_j}}{H^{\frac{1}{3}}}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{h^2}{3}\frac{\partial(u_jH)}{\partial t\partial x_j}\right)=0 \tag{2}$$

ここに，式 (1) は連続式，式 (2) は運動方程式であり，H は全水深，u_i は断面平均流速，h は静水深，g は重力加速度，n は Manning の粗度係数，z は地盤高である．

(2) CIVA-安定化有限要素法による離散化

支配方程式を移流ステップと，非移流ステップとに分離すると，以下の式が得られる．

移流ステップ

$$\frac{\partial H}{\partial t}+u_j\frac{\partial(u_iH)}{\partial x_j}=0 \tag{3}$$

非移流ステップ

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial(u_iH)}{\partial x_i}=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial(u_iH)}{\partial t}+(u_iH)\frac{\partial u_j}{\partial x_j}+gH\frac{\partial(H+z)}{\partial x_i}+\frac{gn^2u_i\sqrt{u_ju_j}}{H^{\frac{1}{3}}}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{h^2}{3}\frac{\partial(u_jH)}{\partial t\partial x_j}\right)=0 \tag{5}$$

各時刻レベルにおいて，まず移流ステップの計算を行い，各方向の線流量を求め，その計算結果を用いて，非移流ステップの計算を行う．移流ステップの式 (3) の解法には CIVA 法を適用し，非移流ステップの式 (4)，(5) の解法には SUPG 法に基づく安定化有限要素法を適用する．

(3) 衝撃捕捉項

衝撃捕捉項 [2] は，水面の不連続面における数値不安定性を回避するために付加される安定化項で，安定化パラメータ τ_{shock} に依存する．以下に，安定化パラメータ τ_{shock} の詳細を示した．

Case1

$$\delta=\tau_{shock}(\|\mathbf{u}_{int}\|)^2, \tag{6}$$

$$\tau_{shock}=\left(\sum_{\alpha=1}^{n_{en}}|\mathbf{u}\cdot\nabla N_\alpha|\right)^{-1}, \tag{7}$$

$$\|\mathbf{u}_{int}\|=\|\mathbf{u}\| \tag{8}$$

Case2

$$\delta=\tau_{shock}(\|\mathbf{u}_{int}\|)^2, \tag{9}$$

$$\tau_{shock}=\frac{\nu_{shock}}{2\|\mathbf{u}_{cha}\|}\left(\frac{|\nabla^2H|}{H_{ref}}\right), \tag{10}$$

$$\frac{\nu_{shock}}{2\|\mathbf{u}_{cha}\|}=\left(\sum_{\alpha=1}^{n_{en}}(c|\mathbf{j}\cdot\nabla N_\alpha|+|\mathbf{u}\cdot\nabla N_\alpha|\right)^{-1}, \tag{11}$$

$$H_{ref}=|\nabla^2H|_{max}, \tag{12}$$

$$\|\mathbf{u}_{int}\|=\sqrt{\|\mathbf{u}\|^2+c^2} \tag{13}$$

従来用いていた安定化パラメータ (Case1) は，非圧縮性流体の Navier-Stokes 方程式の解析に対し，提案されたものである．Case1 は，代表流速 $\mathbf{u}_{int}$ を流速 $\mathbf{u}$ としているため，τ_{shock} が流速にのみ依存し，安定化を施すものである．新たな安定化パラメータ (Case2) は，Case1 をベースとし，津波を対象とするために，代表流速 $\mathbf{u}_{int}$ は流速 $\mathbf{u}$ のみでなく，波速 c も含めたものとなっている．また，Case1 とは異なり，水深の二階微分値を考慮していることが特徴で，これにより，水面の不連続面における安定化を施す効果が得られる．

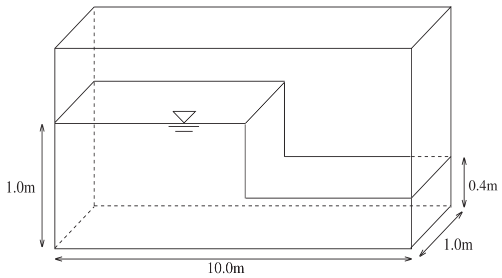
KeyWords：津波，CIVA-安定化有限要素法，衝撃捕捉項
連絡先：　〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27　E-mail: takahashi@civil.chuo-u.ac.jp

3. 数値解析例

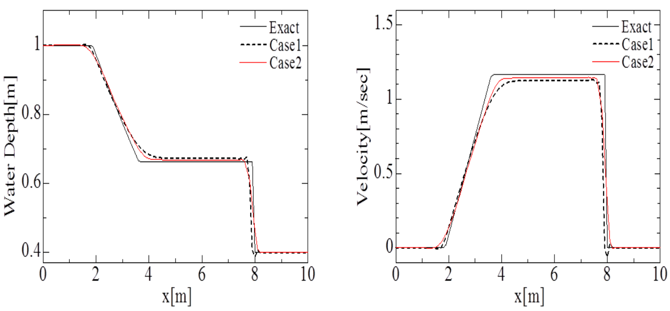
(1) 段波問題

安定化パラメータの比較検討のために，**図-1** に示す段波問題の解析を行った．壁面における境界条件には Slip 条件を与え，解析には x 方向の分割幅が 0.05m，y 方向の分割幅が 0.025m の有限要素メッシュを用い，微小時間増分量は 0.01sec と設定した．なお，本解析例では，分散項を無視した浅水長波方程式を用いている．

衝撃捕捉項の安定化パラメータにそれぞれ Case1，Case2 を用い，解析を行った結果を**図-2** に示した．図より，従来の安定化パラメータである Case1 では不連続面近傍においてオーバーシュート，アンダーシュートが生じているのに対し，新たに提案した Case2 の安定化パラメータを用いた解析結果ではオーバーシュートなどは生じていないことが確認された．また，Case1 と比べ Case2 の結果は，水面形状，x 方向の流速分布ともに厳密解とより良い一致を示している．



図－1　初期状態

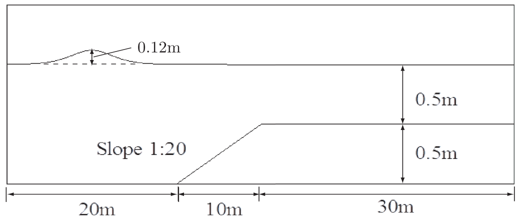


図－2　1 秒後の解析結果

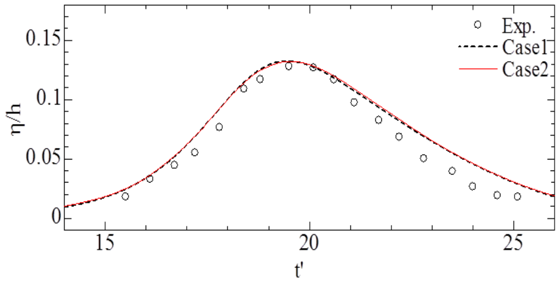
(2) 孤立波伝播問題

安定化パラメータのさらなる検討のために，孤立波伝播問題を取り上げ，解析を行った．解析モデルは**図-3** に示す，Street の水理実験モデル[3] で，進行する孤立波を初期条件として与える．また、壁面における境界条件として Slip 条件を与え，解析には x 方向，y 方向の分割幅が 0.1m の有限要素メッシュを用いた．なお，微小時間増分量は 0.005sec とした．

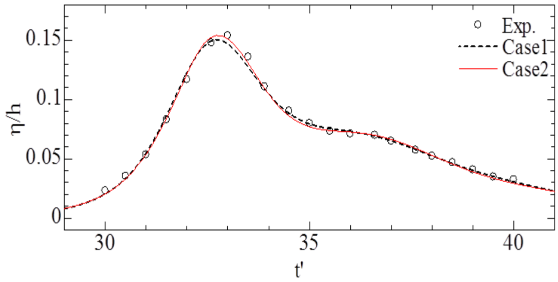
図-4，図-5 に無次元位置 $x/h = 30$，$x/h = 41.6$ における水位変動量の時刻歴を示した．図から，Case2 の安定化パラメータを用いた解析結果は，波高の減衰が低減され，Case1 と比較して実験結果と良い一致を示すことが確認された．



図－3　Street の水理実験モデル



図－4　$x/h = 30$ における水位変動量の時系列



図－5　$x/h = 41.6$ における水位変動量の時系列

4. おわりに

本論文では，Boussinesq 方程式に対して，CIVA-安定化有限要素法を適用し，衝撃捕捉項の安定化パラメータについての検討を行い，以下の結論を得た．

- 段波問題において，新たに提案した安定化パラメータの Case2 では，従来の安定化パラメータである Case1 と比較して厳密解と良く一致することが確認され，その有効性が示された．
- 孤立波伝播問題において，Case2 の安定化パラメータを用いた解析結果は，Case1 の解析結果と比較して実験結果と良い一致を示した．

今後の課題として，広域の津波遡上問題への適用が挙げられる．

参考文献

1) 唐木田泰久，樫山和男：移動境界を考慮した CIVA-安定化有限要素法による高潮氾濫解析，第 19 回数値流体力学シンポジウム，D5-6，2005
2) S.Takase，K.Kashiyama，S.Tanaka，T.E.Tezduyar：Space-time SUPG formulation of the shallow-water equations，*Int. J. Numer. Meth. Fluids*，Vol. **64**，pp.1379-1394，2010
3) Street.R.L.，S.J.Burgers and P.W.Whitford：The Behavior of Solitary Waves on a Stepped Slope，*Dept.Civ.Eng.Stanford Univ.Tech.Rep.*，No.**93**，1968