

不等流における流速の鉛直分布について—渦動粘性モデル解析

国士舘大学 正会員 山坂昌成, 北川善廣

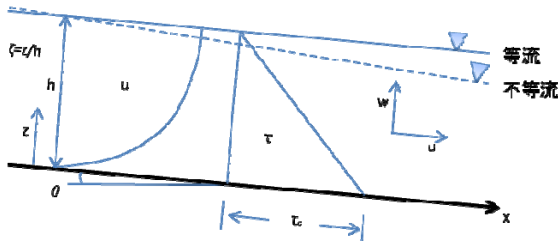
国士舘大学理工学部 ○関本匠馬

1. 目的

河川などの開水路流れでの、平均流速と底面せん断応力の関係や湾曲流の二次流強度を規定する際には、一般的に不等流であっても等流の流速分布が適用されている。しかし、実河川においては流水断面が一定でない場合が殆どで、流速分布が等流とは異なる可能性がある。そこで、乱流における加速・減速域の流速分布の変化について、そのメカニズムについて明らかにすることを目的として、理論解析を行った。

2. 研究対象・方法

本研究では、流下方向(x 方向)流速を u 、水路上向き垂直方向(z 方向)流速を w 、水深を h 、圧力を p 、水路の縦断勾配角を θ 、重力加速度を g として鉛直二次元の定常乱流を想定して、水理学の方程式に基づいて流速計算式を求め、加速・減速による流速分布の変化を計算する手法について検討する。



図・1 鉛直二次元の等流と不等流

3. 渦動粘性係数

鉛直二次元の定常乱流での流速分布について検討するにあたって、まず、渦動粘性係数 ε を求める必要がある。等流における粗面乱流の対数流速分布式は、以下となる。

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z}{k_s} + Ar = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{h}{k_s} \zeta \right) + Ar \quad (1)$$

ここに、 κ はカルマン定数 ($=0.4$)、 u_* は摩擦速度、 k_s は相当粗度、 $Ar = 8.5$ 、 $\zeta = z/h$ である。この流速分布をもとに、乱流における、せん断応力と重力の釣り合い式を考え、渦動粘性係数を求めると、

$$\varepsilon_l = \kappa u_* h \zeta (1 - \zeta) \quad (2)$$

となり、 z 方向に $\zeta = 1/2$ で極大となる放物線分布をしている。しかし、このまま解析を行うと解の複雑化は避けられないため、鉛直方向に一様分布していると仮定し、平均化して以下の式を用いる。

$$\varepsilon = \alpha u_* h = \frac{\kappa u_* h}{6} \quad (3)$$

このように渦動粘性係数を定め解析解を求める。

4. 基礎方程式

鉛直二次元において、渦動粘性係数を用いた運動方程式と連続式、及び境界条件は、

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (4)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z=0 \quad \text{で} \quad u = \chi_b h \frac{du}{dz}, \quad w = 0 \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z=h \quad \text{で} \quad \frac{du}{dz} = 0, \quad w = u_s \frac{dh}{dx}, \quad p = 0 \end{array} \right. \quad (8)$$

となる。 u_s は水面流速である。式(7)、(8)を満足する最も単純な w の分布を採用し、

$$w = u_s \frac{dh}{dx} \cdot \frac{z}{h} \quad (9)$$

とする。等流における流速を $(U, 0)$ 、不等流の流速を $(u = U + u', w = 0 + w')$ 、圧力を $p = p_n + p'$ とする。式(5)より dh/dx の二次以上の項、及び流線曲率を無視し、不等流の圧力分布が以下のように得られる。

$$p = p_n + p' = \rho g (h - z) \cos \theta \quad (10)$$

式(9)、(10)、 $u = U + u'$ を式(4)に代入し、 dh/dx の高次項を無視して線形化すると、

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} = \left\{ g \cos \theta + \frac{U_s}{h} (-U + z \frac{dU}{dz}) \right\} \frac{dh}{dz} \quad (11)$$

となる。

キーワード 不等流, 流速分布, 乱流, 加速・減速

連絡先 〒154-8515 東京都世田谷区世田谷 4-28-1 国士舘大学理工学部都市ランドスケープ学系

5. 不等流の流速分布解

等流における流速分布 U および水面流速 U_s と dU/dz はそれぞれ,

$$U = \frac{u_*^2}{\varepsilon h} \left(hz - \frac{z^2}{2} + C_b h \right) \quad (12)$$

$$\frac{dU}{dz} = \frac{u_*^2}{\varepsilon h} (h - z) \quad (13)$$

$$U_s = \frac{u_*^2}{\varepsilon h} \left(\frac{h^2}{2} + C_b h \right) \quad (14)$$

となる. ここに, $C_b = \chi_b h$, $u_*^2 = gh \sin \theta$ である. 式(12), (13), (14)を式(11)に代入し, 式(7), (8)の境界条件のもとで 2 回積分し, 一定渦動粘性係数の式(3)を代入すると,

$$\begin{aligned} u' = \frac{15^2 u_*}{h^3} & \left[\left\{ \frac{1}{15 \tan \theta} \frac{1}{2} \frac{hz^2}{2} \right. \right. \\ & + \frac{15}{h^3} \left(\frac{h^2}{2} + h^2 \chi_b \right) \left(-\frac{z^4}{24} - \frac{z^2 h^2}{2} \chi_b \right) \Big\} \\ & - \left\{ \frac{1}{15 \tan \theta} zh^2 + \frac{15z}{h^3} \left(\frac{h^2}{2} + h^2 \chi_b \right) \left(-\frac{h^3}{6} - h^3 \chi_b \right) \right\} \\ & - \left\{ \frac{1}{15 \tan \theta} h^3 \chi_b + \frac{15 \chi_b}{h^2} \left(\frac{h^2}{2} + h^2 \chi_b \right) \left(-\frac{h^3}{6} \right. \right. \\ & \left. \left. - h^3 \chi_b \right) \right\} \Big] \frac{dh}{dx} \end{aligned}$$

が得られ, さらにこの式を無次元化して整理すると,

$$\begin{aligned} u' = 15 u_* \frac{1}{\tan \theta} & \left(\frac{\zeta^2}{2} - \zeta - \chi_b \right) \frac{dh}{dx} \\ & + 15^3 u_* \left(\frac{1}{2} + \chi_b \right) \left\{ -\frac{\zeta^4}{24} - \chi_b \frac{\zeta^2}{2} \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{6} + \chi_b \right) (\zeta + \chi_b) \right\} \frac{dh}{dx} \quad (15) \end{aligned}$$

となる. これが不等流乱流での加速・減速域における流速変動を表わす.

6. 計算結果と考察

まず式(15)の右边を前項と後項に分けて絶対値をとり, 加速・減速流に与えている影響を無次元化(それぞれの積分値は 1.0)した流速分布形から比較すると, 図-2 のようになる. 前項は等流の流速分布形と一致しているのに対し, 後項は全水深の約半分を境に, 下方で減速し, 上方で加速していることが分かる. $dh/dx < 0$ の加速域においては, 後項は全域で負となるので, 流速分布形の特徴より, 河床面付近で

より速く, 水面付近でより遅くなるように, 流速分布に影響を与えていることが分かる. また, 前項のみ勾配の影響を受けており, 勾配が大きくなると, 相対的に後項の影響が高まることを示している.

図-3 に等流の流速分布と加速不等流の流速分布を比較した計算例を示す. 勾配を大きく設定すると後項の影響が大きくなり, 上記のように底面付近で加速, 水面付近で減速する特徴が見られる. これは層流を対象として解析した昨年²⁾の結果と定性的には一致している. しかし, 層流の場合と比較すると, 流速の鉛直分布が一様に近いため, w 成分による主流速の変化が小さく, 乱流の方が層流よりも加速・減速域における流速分布の変化度合いが小さいと結論づけることが出来る. 図-3 では, w 成分の影響が大きく現れるように, 勾配を $1/100$ と大きく取っているが, 流速分布の変化はほとんど生じない.

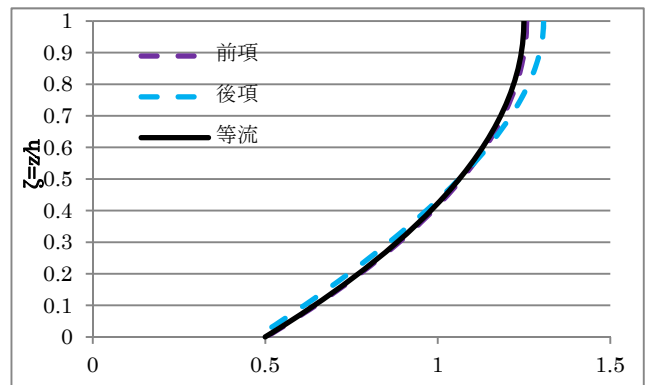


図-2 無次元化した前項と後項の流速分布形の比較

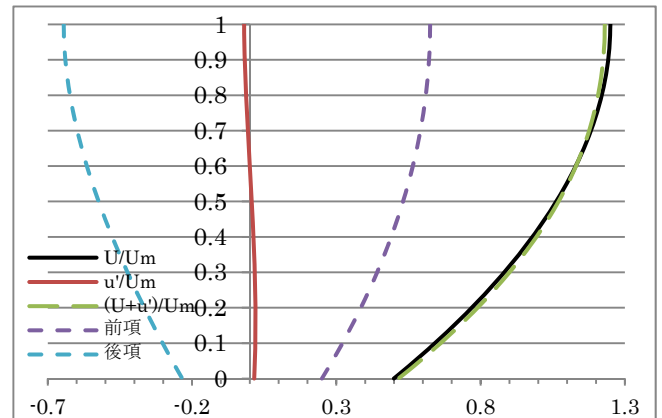


図-3 計算例における流速分布比較

($i_0 = 1/100$, $dh/dx = -1/200$)

参考文献

- 1) 山坂昌成, 他: 一様湾曲流路の流れの三次元解析, 土木学会論文集, 第 411 号/II-12, pp. 99-108, 1989.
- 2) 山坂昌成, 北川善廣, 王 治: 不等流における流速の鉛直分布について—層流を対象として, 第 39 回土木学会関東支部技術研究発表会講演概要集, II-90, 2012.