

河川における定在波の発生条件

中央大学理工学部学	学生会員	○笠間 雄一郎
中央大学大学院	学生会員	銭潮潮
中央大学理工学部	フェロー会員	山田 正

1. はじめに

河川における定在波の発生に関して水理物理量である単位幅流量 q , 全水頭(エネルギー) E , 運動量 F の関係から, 波の発生を決定する理論が Benjamin と Lighthill ら¹⁾によって導き出されている. この理論は水平床と仮定し, 単位幅流量 q とベルヌーイサム E , 運動量 F を上流端に人為的に与え, 波の発生条件について基礎的な議論をしている. 図-1 は, Benjamin と Lighthill の理論に基づき, 河床勾配と摩擦抵抗が無く, 単位幅流量が一定の条件における波の発生条件を表している. 横軸は, 上流端におけるベルヌーイサムを限界ベルヌーイサム E_c で無次元化することにより得られる r : (無次元化した全水頭) である. 縦軸は上流端における運動量を限界運動量 F_c で無次元化することにより得られる s : (無次元化した運動量) である. 領域 A は, 波の発生及び存在を表す. また, 領域 B は, 波も流れも発生していないことを示している. 本研究は, 上記の理論を基に, 河床勾配がある状態における定在波の発生条件の導出を行う. また, 勾配が異なる場合において領域 A がどのように変化するか検証すると共に, r と s の理論式との比較を行い, 既存の理論を充実させることを目的とする.

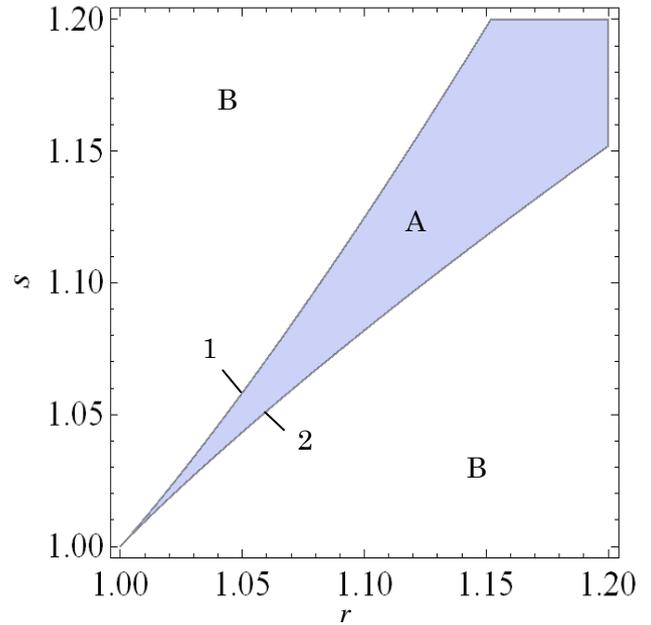


図-1 Benjamin と Lighthill の理論により導かれた波の発生条件図(勾配 0)

2. 勾配を有する開水路での波の発生条件

単位幅流量 q , 全水頭 E , 運動量 F が各断面で一定とし, 波を伴う流れが発生していると仮定すると, ρ を水の密度, g を重力加速度, 勾配を θ , y を任意の水深とし, 理論導出の基礎となる各水理量を(1), (2), (3)式で表す.

$$q = \psi \quad (1) \quad F = \int_0^{\eta \cos \theta} \left(\frac{P}{\rho} + \psi_y^2 \right) dy \quad (2)$$

$$E = \frac{1}{2} (\psi_x^2 + \psi_y^2) + gy \cos \theta + \frac{P}{\rho} \quad (3)$$

(2)式は運動量, (3)式は全水頭を表し, (2), (3)式のゲージ圧 P は自由表面上で 0 である. 流れ関数 ψ は(4)式のようにおき, 水平方向, 鉛直方向の流速はそれぞれ, (5), (6)式で表す.

$$q = yf(x) - \frac{y^3}{3!} f''(x) + \frac{y^5}{5!} f''''(x) \quad (4)$$

$$\psi_x = yf'(x) - \frac{y^3}{6} f'''(x) \quad (5)$$

$$\psi_y = f(x) - \frac{y^2}{2} f''(x) \quad (6)$$

流れ関数 ψ は, 流線上で一定の値をとる. (3), (2)式より(7)式が得られる. さらに, (5), (6)式を二乗して微小項を無視し (7)に代入することで運動量 F を任意関数 $f(x)$ で表した(8)式を得る.

$$F = \int_0^{\eta} \left(E - gy \cos \theta - \frac{1}{2} \psi_x^2 + \frac{1}{2} \psi_y^2 \right) dy \quad (7)$$

$$F = E\eta - \frac{1}{2} g\eta^2 \cos \theta - \frac{1}{6} f'(x)^2 \eta^3 \cos^3 \theta + \frac{1}{2} f(x)^2 \eta \cos \theta - \frac{1}{6} f(x) \cdot f''(x) \eta^3 \cos^3 \theta \quad (8)$$

また(4)式は, ψ は水面で一定であることを考慮し, 任意関数 $f(x)$ で表す. さらに $f(x)$ を微分し, また二乗した式を(8)式に代入して任意関数 $f(x)$ を消去することで水深 η に関する三次方程式(9)式を得る.

$$\frac{1}{3} q^2 \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 + g \cos \theta \eta^3 - 2E\eta^2 + 2F\eta - q^2 = 0 \quad (9)$$

(9)式の η , x , E , F を限界水深におけるそれぞれの水理物理量を用いて無次元化することにより(10)式を得る.

$$\frac{1}{3} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 + \cos \theta w^3 - (1 + 2 \cos \theta) r w^2 + (2 + \cos \theta) s w - 1 = 0 \quad (10)$$

ここで, w , z はそれぞれ無次元化した水深と流れ方向の変化を表している. 下線部の無次元化した水深に関する三次方程式(10)式が勾配のない状態において, 異なる三つの実数解をもつ条件はカルダノの公式を用いることにより判別式(11)式で表すことができる.

$$3r^2 s^2 + 6rs - 1 - 4(r^3 + s^3) > 0 \quad (11)$$

キーワード 定在波, 無次元化, ベルヌーイサム, 運動量, 河床勾配

連絡先 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学大学院理工学研究科河川水文研究室 Tel:03-3817-1805

E-mail:lemondcanon@yahoo.co.jp

判別式(11)式を満たす r と s のとる値が図-1の A 領域に対応し、波が存在することを表す。A 領域と B 領域を分けている上側の境界線 1 は等流の常流を表しており、下側の境界線 2 は等流の射流を表している。本研究は新たに勾配がある場合を考慮した判別式 (12)を用いて、任意の勾配に対する定在波の発生条件を導く。

$$-4\left(-\frac{1}{3}r^2 \cos^2 \theta (1+2\cos \theta)^2 + \frac{s}{\cos \theta} (2+\cos \theta)\right)^3 - 27\left(\frac{1}{3}rs \cos^2 \theta (2+\cos \theta)(1+2\cos \theta) - \frac{2}{27}r^3 \cos^3 \theta (1+2\cos \theta)^3 - \frac{1}{\cos \theta}\right)^2 > 0 \quad (12)$$

3. 無次元全水頭 r と無次元運動量 s の理論式の導出と判別式を満たす r と s の比較

本章は 1, 2 章で示した r と s の理論式の導出と判別式(12)を満たす r と s との比較を行なう。単位幅流量を一定とし、等流状態とした場合は無次元全水頭 r と無次元運動量 s を(13)式と(14)式で表すことができる。

$$r = \frac{v_1^2/2 + gh_1 \cos \theta}{\sqrt[3]{g^2 q^2 (1/2 + \cos \theta)}} \quad (13)$$

$$s = \frac{v_1^2 h_1 + 1/2 gh_1^2 \cos \theta}{\sqrt[3]{g^4 q (1 + 1/2 \cos \theta)}} \quad (14)$$

(13) 式と(14)式を整理すると上流端のフルード数(15)式のみで表すことができ、(16)、(17)式の形となる。

$$Fr = \frac{v_1}{\sqrt{gh_1}} \quad (15) \quad r = \frac{1}{(1+2\cos \theta)} Fr^{\frac{4}{3}} + \left(\frac{\cos \theta}{1/2 + \cos \theta}\right) Fr^{\frac{2}{3}} \quad (16)$$

$$s = \frac{1}{(1+1/2 \cos \theta)} Fr^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{(2+\cos \theta)} Fr^{\frac{3}{4}} \quad (17)$$

(16)、(17)式の Fr に常流状態と射流状態における上流側の Fr と任意の河床勾配 I から換算した θ を代入すると、常流の場合は、流れも波も存在しない領域(B 領域)と波が発生、存在する領域 (A 領域) の境界線上 C に r と s の値が分布する。それに対して、射流は A 領域と B 領域の境界線上 D に r と s の値が分布する。

(16)、(17)式に勾配 1/100 と常流状態のフルード数 ($Fr=0.1 \sim 0.9$)、射流のフルード数 ($Fr=1.2 \sim 3.0$) を与え、 r と s の理論値の分布を見ると、A 領域と B 領域を分ける上下の境界線上にのることが分かった。このことから、勾配が緩やかならば理論式から求まる r と s の値と判別式(12)をみたす $r-s$ の値が一致することが言える。勾配が現実的に有り得ない様な急な場合には、境界線上 1 に常流での $r-s$ の理論値が分布した。しかし、射流での r と s の理論値は (r,s)=(1.5, 1.3) の周辺で境界線上 2 に分布しなくなることが分かり、緩勾配とは逆に、理論式から求まる r と s の値と判別式(12)をみたす r と s の値が一致しないことが分かった。

4. 勾配を有する波の発生条件図の考察

図-2 は勾配を考慮した判別式(15)式の θ の変化に対する A 領域を表した図である。

青色の領域は開水路に勾配を 0~1/100 で与えた場

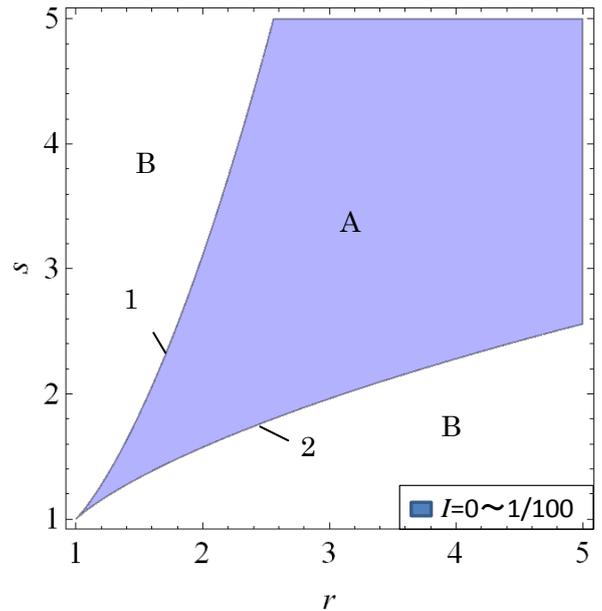


図-2 勾配を考慮した定在波の発生条件図(r と s の関係)

合の A 領域を表しており、勾配を考慮していない波の発生条件図の A 領域 (図 1) と比べると、A 領域と B 領域を分けている上側の境界線 1 と A 領域と B 領域を分けている下側の境界線 2 に変化がないことから、A 領域に全く変化がないことが分かった。勾配がさらに緩やかな 1/1000, 1/10000 の場合においても同様の結果が得られた。このことから実河川の勾配であれば定在波の発生条件に影響しないことが分かった。

5. まとめ

理論の検証で得られた知見を以下に示す。

- 1) 緩勾配の場合理論式により求まる r と s の値と、判別式(12)を満たす r と s の値が一致することを示した。
- 2) A 領域に関して勾配が 1/10000 から 1/100 の範囲においては変化しないことを示した。
- 3) 勾配が 1/10000~1/100 程度であれば定在波の発生条件に影響を及ぼさないことを示した。
- 4) 1, 2, 3 の結果から河川で定在波が発生する条件は極めて限定的であることが言える。

6. 参考文献

- 1) T.B. Benjamin and M.J.Lighthill: On cnoidal waves and bores, 1950
- 2) Quimpo Marirites Sescar : Fundamental study on open channel flow with hump and narrow path, 2009, 3, 中央大学博士論文

7. 謝辞

本研究は文部科学省(課題番号: 24656297)の支援を受けている。ここに記して感謝の意を表します。