

安定化有限要素法による低マッハ数近似に基づく熱流体解析

中央大学 学生員 真野 和之
 中央大学大学院 学生員 池田 哲也
 中央大学 正会員 櫻山 和男

1. はじめに

都市の熱対流解析において、Boussinesq 近似に基づく支配方程式が広く利用されている。しかし、火災などの高温熱源による熱対流解析においては、温度変化による密度変化を捉えることが重要になるため、一般に低マッハ数近似に基づく圧縮性流体の基礎方程式が用いられている。一方、離散化手法としては差分法が一般的であるが、複雑な都市形状を表現するためには、非構造格子に基づく有限要素法は有効であるといえる。

本論文では、適用範囲の向上を目的として、基礎方程式に低マッハ数近似を用い、離散化手法として複雑形状への適用性に優れる有限要素法に基づく手法を提案する。本手法の妥当性を検討するために、Boussinesq 近似および参照解¹⁾との比較を行なった。

2. 数値解析手法

(1) Boussinesq 近似による基礎方程式と離散化手法

非圧縮粘性流体を考え、基礎方程式に Boussinesq 近似を用いて無次元化された Navier-Stokes 運動方程式、連続式およびエネルギー方程式を用いる。

運動方程式；

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + GrT\delta_{i2} = 0 \quad (1)$$

連続式；

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

エネルギー方程式；

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} = 0 \quad (3)$$

ここで、 u_i は x_i 方向の流速成分、 p は圧力、 T は温度、 δ_{i2} はクロネッカーのデルタ、 $Gr (= g\beta(T_w - T_c)L^3/\nu^2)$ は Grashof 数、 $Pr (= \nu/\alpha)$ は Prandtl 数である。ただし g は重力加速度、 $\beta (= 1/T_0)$ は体膨張係数、 T_w は高温壁温度、 T_c は低温壁温度、 T_0 は基準温度、 L は代表長さ、 ν は動粘性係数、 α は温度伝導率である。

本論文では、流れ場の離散化手法として速度場と圧力場を分離して解く分離型解法（流速修正法）を用いて計算を行う。分離型解法における圧力のポアソン方程式および流速を求める式に対しては Galerkin 法に基づく有限要素法、中間流速式およびエネルギー方程式に対しては SUPG 法に基づく安定化有限要素法¹⁾を適用し、空間方向の離散化には、P1/P1 要素による補間を行う。なお、エネルギー方程式の

時間方向の離散化には、運動方程式、連続式と同様に前進差分を用いた。

(2) 低マッハ数近似による基礎方程式と離散化手法

低マッハ数近似は圧縮性 Navier-Stokes 方程式をもとにして、流れのマッハ数が小さいことを仮定して得られる近似である。基礎方程式に低マッハ数近似を用いて、無次元化された Navier-Stokes 運動方程式、連続式、エネルギー方程式、状態方程式を用いる。

運動方程式；

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - Ga(\rho - 1)\delta_{i2} = 0 \quad (4)$$

連続式；

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5)$$

エネルギー方程式；

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} = 0 \quad (6)$$

状態方程式；

$$\rho = \frac{1}{(\beta \Delta T T + 1)} \quad (7)$$

ここで、 ρ は密度、 $\Delta T (= T_w - T_c)$ は高温壁と低温壁の温度差、 $Ga (= gL^3/\nu^2)$ は Galilei 数である。

低マッハ数近似の計算にも分離型解法を用い、離散化手順に関しても Boussinesq 近似の場合と同様とした。ただし低マッハ数近似では、運動方程式 (4) および連続式 (5) で密度変化を考慮するため、解析手順は Boussinesq 近似とは異なる。まずエネルギー方程式 (6) から温度を求め、状態方程式 (7) から密度を求める。その後、中間流速と圧力を計算し、それらを運動方程式に代入して流速を求める。

3. 二次元正方形 Cavity 内自然対流問題

(1) 解析領域と条件

図 - 1 に示すような、二次元の正方形 Cavity において、上下面を断熱境界とし、左右の側面をそれぞれ一定温度に加熱、冷却した場合に生じる自然対流を解析対象とする。解析メッシュは、図 - 2 に示すように x 方向、 y 方向にそれぞれ 30×30 分割、最小メッシュ幅 0.0111、総節点数 961、総要素数 1800 とした。解析条件は $Pr = 0.71$ 、 $Ra = 10^6$ とする。 $Ra (= Gr \times Pr)$ は Rayleigh 数である。また、低マッハ数近似式の場合、Galilei 数により速度場が決定されるため、 $Ra = Gr \times Pr = Ga \times \beta \Delta T \times Pr$ より、温度差

KeyWords： 安定化有限要素法、低マッハ数近似、Boussinesq 近似

連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: d39301@educ.kc.chuo-u.ac.jp

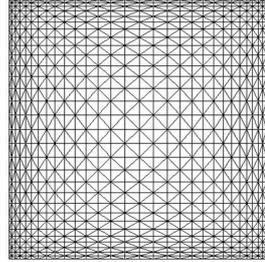
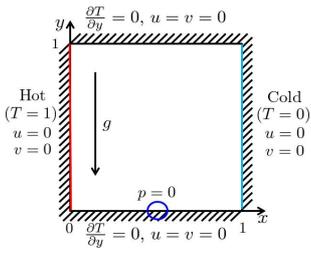


図-1 解析領域, 境界条件 図-2 解析メッシュ図

表-1 解析ケース

No.	基礎方程式	Ra	$\beta\Delta T$
1	Boussinesq 近似式	10^6	
2	低マッハ数近似式	10^6	0.104
3	低マッハ数近似式	10^6	0.5

パラメータ $\beta\Delta T$ を定義する．本論文では， $\beta\Delta T = 0.104$ ， 0.5 (基準温度 $T_0 = 15$ とすると， $\Delta T = 30$ ， 144 に相当) の 2 パターンで解析を行った．

(2) 解析結果

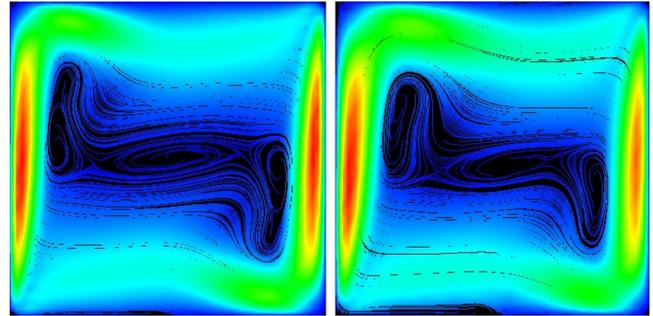
Boussinesq 近似および低マッハ数近似を用いて解析を行った，速度場の流線分布を図-3に示す．この図から，Boussinesq 近似による解析結果は，空間の中心点について対称な分布となっている．しかし，低マッハ数近似による解析結果は非対称であり，流速，渦の大きさに違いが見られる．これは低マッハ数近似が，熱膨張による体積変化を考慮していることによるものである．また，図-4に鉛直断面における水平方向の速度分布を示す．低マッハ数近似の解析結果を見ると， $\beta\Delta T = 0.104$ の場合は，Boussinesq 近似の解析結果と良い一致を示している．また，低マッハ数近似で $\beta\Delta T = 0.5$ とした場合は，Boussinesq 近似の解析結果との差異が大きくなるのがわかる．参照解との比較を行うと，図-5に示すように，低マッハ数近似で $\beta\Delta T = 0.5$ とした場合の解析結果は，参照解の空間の中心点における非対称性を捉え，良い一致を示している．

4. おわりに

本報告では，安定化有限要素法を用いた低マッハ数近似による熱流体連成解析を行い，Boussinesq 近似および参照解との比較を行い，以下の結論を得た．

- 温度差が小さい場合，解析結果に対称性が見られ，Boussinesq 近似の解析結果と良い一致を示した．
- 温度差が大きい場合，温度差が小さいと仮定する Boussinesq 近似の解析結果とは差異が生じ，参照解の空間の中心点における非対称性を捉えることができた．

今後の課題として，さらに温度差を大きくした場合での解析および精度検証が挙げられる．



Boussinesq 低マッハ数 ($\beta\Delta T = 0.5$)
図-3 流線分布

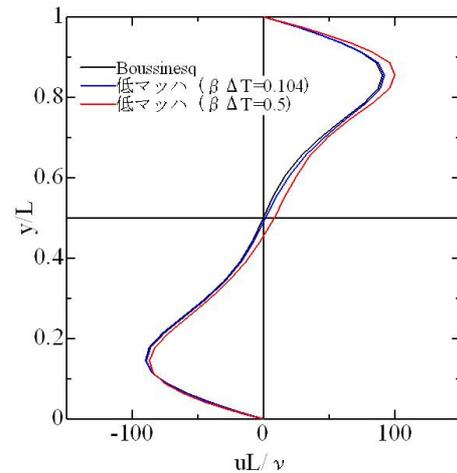


図-4 鉛直断面における水平方向速度分布

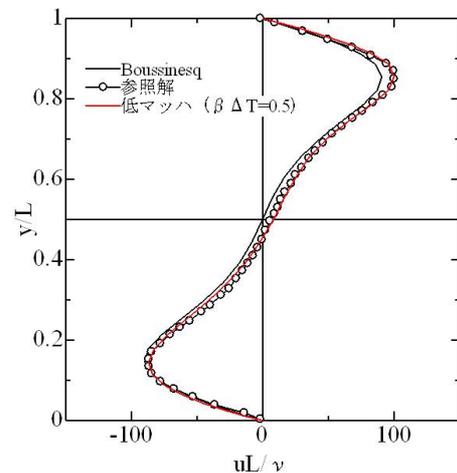


図-5 参照解との比較

参考文献

- 1) Helmi Mlaouah, 辻俊博, 長野靖尚: 温度差の大きい閉空間における熱対流, 日本機械学会論文集 (B 集), 62 巻 594 号 (1996-2), pp.346-352
- 2) 日本計算工学会流れの有限要素法研究委員会: 続・有限要素法による流れのシミュレーション, シュプリンガー・ジャパン, 2008.
- 3) 白石靖幸, 加藤信介, 石田義洋: 低マッハ数近似との比較による Boussinesq 近似式の予測精度の検討, 日本建築学会環境系論文集, 第 577 号 (2004-3), pp.13-18