粘弾性材料中の欠陥に対する２次元面外波動の順解析および逆散乱解析

○群馬大学 学生会員 田代直哉
群馬大学大学院 正会員 斎藤隆泰

1. はじめに

高度経済成長期に集中的に整備された土木構造物は老朽化が進行し，今後更新の時期を迎える．しかしながら，膨大な数の構造物をすべて更新することは不可能である．もし, 構造物内部の欠陥を超音波非破壊評価法で検出し, 欠陥の位置や大きさ等を特定できれば, より効率的な補修対策等が可能となる．超音波非破壊評価で得られた波形データを用いて欠陥形状を特定する方法の１つとして，線形化逆散乱解析法[1]が知られている．しかしながら, 既往の研究では等方性材料中の欠陥を対象とした解析例が多く, 例えば粘弾性材料や異方性材料のような複雑な媒体を対象とした解析例は数少ない. 本研究では, 粘弾性材料中の欠陥を対象とした線形化逆散乱解析手法について検討する．また, 粘弾性材料中の波形を求める方法として, ここでは粘弾性波動問題に対する最新の波動解析手法である演算子積分時間領域境界要素[2]を用いる．

2. 粘弾性材料中の欠陥に対する逆散乱解析

Fig.1 のような２次元無限粘弾性体 D 内部に存在する空洞欠陥 D_c に対する逆散乱解析について考える．ここでは入射波を SH 波として同一の探触子を用いて超音波の送受信を行い散乱波形を計測する, いわゆる超音波パルスエコー法を想定する．また, この空洞は, Fig.1 で示すように, x_3 方向にも一定の断面を持つものとし, 波動場も x_3 方向に同位相であり, 一定の波数 k_T で x_3 方向に振動しながら x_1-x_2 面内を伝播するものとする．

この時, 面外波動場の変位 u は, 次の方程式を満足する．

$$\mu(\omega)\nabla^2 u + \rho\omega^2 u = 0 \quad (1)$$

ここで, μ はせん断弾性定数であり, 周波数 ω に依存することに注意する．また, ρ は密度である．散乱波の積分関係式は, 空洞の境界 ∂D での表面力が境界条件よりゼロとなることを考慮すれば, 点 $\mathbf{x}$ での変位は次のように表せる．

$$u^{sc}(\mathbf{x}, k_T) = \int_{\partial D} n_\alpha(\mathbf{y}) \frac{\partial U}{\partial y_\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k_T) u(\mathbf{y}, k_T) dS_{\mathbf{y}} \quad (2)$$

ここで, $U(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k_T)$ は２次元粘弾性面外波動問題に対する基本解であり, $n_\alpha(\mathbf{y})(\alpha = 1, 2)$ は境界 ∂D 上の点 $\mathbf{y}$ における外向き単位法線ベクトルである．ここで, 基本解 $U(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k_T)$ に対し, 漸近展開を行い, 点 $\mathbf{x}$ が空洞 D_c の寸法, 波長 $\lambda^{in} = 2\pi/k_T$ に比べ十分遠方にあると仮定した遠方近似を用いれば, 式 (2) は次のように表すことができる．

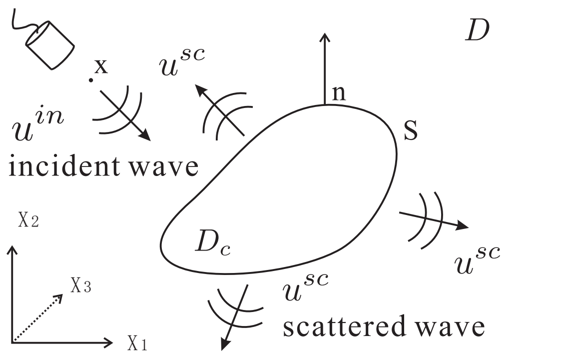

図 1 Ultrasound pulse - echo model.

$$u^{sc}(\mathbf{x}, k_T) = \frac{k_T \hat{x}_\alpha}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k_T |\mathbf{x}|}} e^{i(k_T|\mathbf{x}| - \frac{\pi}{4})} \times \int_{\partial D} n_\alpha(\mathbf{y}) e^{-ik_T \hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{y}} u(\mathbf{y}, k_T) dS_{\mathbf{y}} \quad (3)$$

ここで, $\hat{x}_\alpha$ は $\mathbf{x}$ の単位ベクトル成分を表す．さて, 式 (3) では, 境界 ∂D 上の点 $\mathbf{y}$ での未知の全変位場 $u(\mathbf{y}, k_T)$ を含んでいる．そこで Born 近似を用いることで, $u(\mathbf{y}, k_T)$ を入射波動場 $u^{in}(\mathbf{y}, \omega)$ で近似する線形化を施し, Gauss の定理を用いれば, 式 (3) は次のように表すことができる．

$$u^{sc}(\mathbf{x}, k_T) = \frac{k_T \hat{x}_\alpha}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k_T |\mathbf{x}|}} e^{i(k_T|\mathbf{x}| - \frac{\pi}{4})} \times \int_{D} \frac{\partial u^{in}(\mathbf{y}, k_T)}{\partial y_\alpha} e^{-ik_T \hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{y}} u^{in}(\mathbf{y}, k_T) dV_{\mathbf{y}} \quad (4)$$

今, 粘弾性体中の入射波を平面波と仮定し, 次のように表す．

$$u^{in}(\mathbf{x}, \omega) = F^{\nu}(k_T) e^{ik_T \hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{x}} \quad (5)$$

ただし, $\hat{\mathbf{d}}$ は入射波の伝播方向ベクトル, F^{v} は波数 k_T に対する入射波の振幅である．さらに, 領域 D_c 内でのみ値を持つ次の特性関数 $\Gamma(\mathbf{y})$

$$\Gamma(\mathbf{y}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{y} \in D_c \\ 0 & \mathbf{y} \in D \end{cases} \quad (6)$$

を導入すると, 式 (4) は,

Key Words: 境界要素法, 粘弾性波動問題, 逆散乱解析
〒 376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1

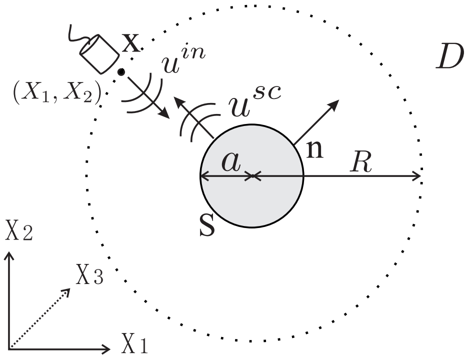

図 2 Analysis model.

$$u^{sc}(\mathbf{x}, k_T) = F^{v}(k_T)\sqrt{\frac{k_T^3}{8\pi|\mathbf{x}|}}e^{i(k_T|\mathbf{x}|-\frac{3}{4}\pi)} \times \int_R \Gamma(\mathbf{y})e^{-2ik_T\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{y}}dV_{\mathbf{y}} \quad (7)$$

となる．ここで R は 2 次元全領域を表す．$\mathbf{K} = 2k_T\hat{\mathbf{x}}$ とし，式 (7) を変形すると，

$$\frac{u^{sc}(\mathbf{x}, k_T)}{F^v(k_T)}\sqrt{\frac{8\pi|\mathbf{x}|}{k_T^3}}e^{-i(k_T|\mathbf{x}|-\frac{3}{4}\pi)} = \int_R \Gamma(\mathbf{y})e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{y}}dV_{\mathbf{y}} \quad (8)$$

となる．上式は，特性関数 $\Gamma(\mathbf{y})$ の Fourier 変換の形をしている．従って，関数 $\Gamma(\mathbf{y})$ は $\mathbf{K}$ の変数変換を考慮して逆 Fourier 変換により，

$$\Gamma(\mathbf{y}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{u^{sc}(\mathbf{x}, k_T)}{F^v(k_T)}\sqrt{\frac{8|\mathbf{x}|}{\pi^3 k_T}} \times e^{-i(k_T|\mathbf{x}|-2k_T\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{y}-\frac{3}{4}\pi)}dk_T d\theta \quad (9)$$

と求める事ができ，欠陥形状の再構成が可能となる．

3. 数値解析例

以下，数値解析例を示す．Fig.2 のように領域 D 内に半径 $r = a$ の空洞欠陥 D_C が存在すると仮定し，超音波の送受信点を，欠陥を取り囲む円周上においた，パルスエコー法により行う．なお，粘弾性材料中の平面波は，式 (5) で与え，振幅 $F^v(k_T)$ は文献 [2] を参考に，

$$F^v(k_T) = \frac{\omega_0^2(1 - e^{i\omega T_0})}{2i\omega(\omega^2 - \omega_0^2)} \quad (10)$$

で与えた．ただし，ω_0 及び T_0 は中心主波数と対応する入射波の周期である．粘弾性体のモデルは三要素標準モデルを用いた．通常，式 (9) における散乱波 $u^{sc}(\mathbf{x}, k_T)$ は，実用的には超音波計測実験等により求めることができる時間波形である．数値解析では，この散乱波 $u^{sc}(\mathbf{x}, k_T)$ を求める際に，波動解析に有効な時間領域境界要素法を用いた順解析が行われる場合が多いが，通常の時間領域境界要素法では粘弾性面外波動問題に対する解析を実行することは困難である．その理由は，粘弾性波動問題に対する時間領域基本解は，解析的に求まらない点にある．そこで，本研究では演算子積分時間領域境界要素法 [2] を用いて散乱波 $u^{sc}(\mathbf{x}, t)$ を求める順解析を行い，その結果を逆 Fourier 変換することで散乱波 $u^{sc}(\mathbf{x}, k_T)$ 求めている．

解析結果を Fig.3 に示す．Fig.3 は，粘弾性体中の欠陥形状の再構成像を示しており，Fig.3(a) は欠陥の全周方向，すなわち $0 \le \theta \le 2\pi$ において超音波の送受信を行った場合の結果を，Fig.3(b) は，$0 \le \theta \le \pi/2$ において送受信を行った場合の欠陥形状の再構成結果を示している．ただし，送受信点は，Fig.3 のように，欠陥から十分遠方に，観測点を角度 θ に対して 10° 刻み，合計 36 点配置した．従って，Fig.3(b) の場合の送受信点は合計 10 点となる．また，Fig.3 における中央の白丸は実際に半径 a の円形空洞が存在する部分を示している．Fig.3(a) より，全周方向から超音波を送受信した場合は，概ね空洞欠陥を再構成できていると言える．一方，Fig.3(b) より，超音波の送受信を $0 \le \theta \le \pi/2$ と 1/4 に限定した場合は，送受信を行った側，すなわち空洞欠陥の 1/4 に対して，比較的精度良く欠陥形状を再現できていることが確認できる．

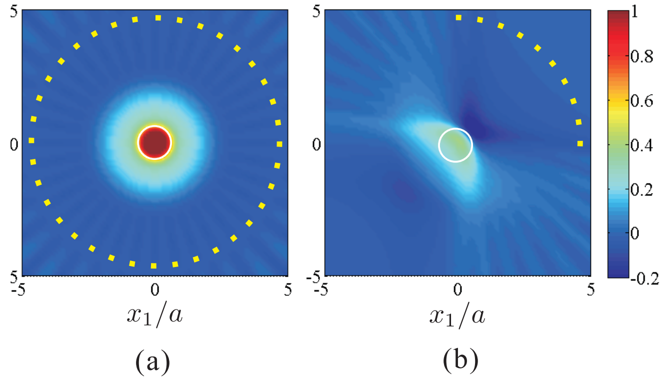

図 3 Analysis results(a)$0 \le \theta \le 2\pi$ (b)$0 \le \theta \le \pi/2$

4. おわりに

本研究では，パルスエコー法を対象とした粘弾性材料中の欠陥に対する面外波動の順解析，および逆散乱解析による欠陥形状再構成を行った．演算子積分時間領域境界要素法を順解析として援用すれば，逆散乱解析に必要な散乱波の時間波形を容易に解析することができ，便利である．また，逆散乱解析の定式化は境界積分表現式を用いて実行されるため，境界要素法との親和性も高い．

今後は，2 次元面内波動問題や 3 次元問題への拡張を行って行く予定である．また，異方性弾性体中の欠陥再構成手法等についても検討していきたい．

参考文献

1) 原陽一, 廣瀬壮一, 板内部の欠陥に対する逆散乱解析, 応用力学論文集,Vol.4,pp51-59,2001
2) 斎藤隆泰, 石田貴之, 福井卓雄, 廣瀬壮一, 粘弾性面外波動問題における演算子積分時間領域境界要素法および高速多重極法の適用, 計算工学論文集, 原稿番号 No.20080011,2008.
3) 小林昭一編著: 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, 2000.